Alkalmazott optimalizálás és játékelmélet
Lineáris programozás
Gyakorlófeladatok

Rétvári Gábor
retvari@tmit.bme.hu

Feladatok

Szöveges feladatok

1. Egy acélgyárban négyfajta zártszelvényt gyártanak: kis, közepes, nagy és extra nagy méretűt. A gyárban háromfajta gép áll rendelkezésre, A, B, és C. Az alábbi táblázat azt adja meg, hogy az egyes gépek a különböző típusú zártszelvényekből óránként hány méternyit képesek előállítani

	Gép		
Zártszelvény	A	B	C
Kis	3	6	8
Közepes	2	4	7
Nagy	2	3	6
Extra nagy	1	2	3

A gépek hetente 50 órát működhetnek, és az egyes gépek működtetése óránként 3, 5, illetve 8 egységnyi pénzbe kerül. A terv szerint az egyes A, B, C és D típusú zártszelvényekből hetente 200, 80, 60, illetőleg 60 méternyit kell legyártani.

a) Fogalmazza meg a fenti géputemezési problémát lineáris program formájában!

b) Keressen kezdeti bázist!

c) A primál vagy a duál szimplex algoritmussal oldaná-e meg a feladatot? (Nem kell megoldani!)

Lineáris programok grafikus megoldása

2. Tekintsük az alábbi lineáris programot (Figyelem: az változókra nincs előjelmegkötés!):

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3
\end{array}$$

a) Oldja meg a lineáris programot *grafikusan*!

b) Oldja meg a lineáris programot (szintén grafikusan), ha a célfüggvényt a $\max -x_1 + x_2$ szerint megváltoztatjuk!

c) Létezik és egyedi-e a megoldás, ha a célfüggvény max $2x_1 - x_2$? Indokolja válaszát grafikusan!

3. Tekintsük az alábbi lineáris programot:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & -x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & & & \geq & -1 \\
 & & & x_2 & \geq & -1
\end{array}$$

a) Ábrázolja a megengedett tartományt grafikusan!

b) Adja meg a megengedett tartomány extrém pontjait!

c) Adja meg a lineáris program optimális célfüggvényértékét és egy optimális megoldását!

d) Egyedi a megoldás? Indokolja válaszát!

e) Hogyan változik az optimális célfüggyvényérték és a hozzá tartozó megoldás, ha a célfüggvényt $\min x_1 + x_2$ kifejezésre változtatjuk? Válaszát indokolja a grafikonon is!

A szimplex algoritmus használata

4. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\max & 3x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \geq & -2 \\
 & x_1 & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

d) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre

- x_4 célfüggvény-együtthatóját 3-ra csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 9-re növeljük,
- ez utóbbi módosítás után x_2 célfüggvény-együtthatóját 9-re növeljük?

5. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 9 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

d) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre

- x_1 célfüggvény-együtthatóját -1-re csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 2-re növeljük,
- x_2 célfüggvény-együtthatóját -4-re csökkentjük,
- x_2 célfüggvény-együtthatóját 3-re növeljük?

6. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -12 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

7. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & \leq & 10 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvényértéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

8. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcr}
\min & 3x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 3x_2 & \geq & -3 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & -6 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\
 & 4x_1 & - & x_2 & \leq & 16
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvényértéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

9. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével. Ügyeljen az egyenlőség és egyenlőtlenség alakú feltételekre.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

b) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható. Ha létezik korlátos optimális megoldás, egyedi az optimum? Ha nem egyedi, adjon altervatív optimális megoldásokat.

c) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre

- x_3 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_3 célfüggvény-együtthatóját 12-re növeljük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 7-re növeljük?

A dualitás

10. Tekintsük a 4. feladatban adott lineáris programot:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \geq & -2 \\
 & x_1 & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Írja fel a lineáris program duálisát és hozza standard alakra! A feladat megoldásához használja az alábbi táblázatot:

	Maximalizálási probléma		**Minimalizálási probléma**	
Feltétel	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	**Változó**
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	tetszőleges	
Változó	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	**Feltétel**
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
	tetszőleges	$\longleftrightarrow$	$=$	

b) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

c) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Egyedi az optimum? Ha nem, adjon altervatív optimális megoldásokat.

d) Vesse össze a kapott optimális megoldást a 4. feladatban kapott megoldással! Mit tudunk a primál és a duál optimális megoldásainak kapcsolatáról?

11. Tekintsük a 6. feladatban adott lineáris programot:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -12 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Írja fel a lineáris program duálisát és hozza standard alakra! A feladat megoldásához használja az alábbi táblázatot:

	Maximalizálási probléma		**Minimalizálási probléma**	
Feltétel	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	**Változó**
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	tetszőleges	
Változó	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	**Feltétel**
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
	tetszőleges	$\longleftrightarrow$	$=$	

b) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

c) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Egyedi az optimum? Ha nem, adjon altervatív optimális megoldásokat.

d) Vesse össze a kapott optimális megoldást a 6. feladatban kapott megoldással! Mit tudunk a primál és a duál optimális megoldásainak kapcsolatáról?

Szöveges feladatok megoldása a szimplex algoritmussal

12. Egy papírgyárban lecserélik a munkagépeket. Kétfajta kartonvágó gépet szerezhetnek be: az A típusú gép 3 dobozt tud kivágni egy perc alatt, egy személy kell a működtetéséhez és 15 ezer egységnyi pénzbe kerül, a B típusú gép ezzel szemben 5 dobozt tud készíteni, de a felügyeletéhez két ember kell és 20 ezer egységnyi pénzbe kerül. A termelési terv percenként legalább 32 doboz legyártása legfeljebb 12 munkás alkalmazása mellett.

    Hány A és B típusú gépet kell beszereznie a papírgyárnak a termelési terv végrehajtásához úgy, hogy a gépek beszerzési költségeit minimalizáljuk?

    a) Fogalmazza meg a fenti beszerzési problémát lineáris program formájában!

    b) Keressen kezdeti bázist!

    c) Oldja meg a lineáris programot a primál vagy a duál szimplex algoritmussal!

    d) Egész értékű eredményt kapott? Ha igen, garantált az egész értékű megoldás?

13. Egy szerszámgépgyárban háromfajta gépet gyártanak: az A, B és C típusú gépeket. A legyártott gépeket a termelési periódus végéig raktárban tárolják. Az egyes gépek legyártásához szükséges munkaidőt, a gépenként termelt profitot, illetve a géptípusonként szükséges raktárhely nagyságát az alábbi táblázat foglalja össze.

	Gép		
Géptípus	A	B	C
Szükséges munkaidő [egység/gép]	2	2	1
Raktározási igény [m^2/gép]	1	1	2
Profit [egység/gép]	3	3	2

    Az C típusú gép elkészítéséhez egy speciális alkatrészre van szükség, amelyből a termelési periódus alatt csak 15 darab áll rendelkezésre. A termelési periódusban 12 egységnyi munkaidő fordítható a gépek legyártására, a teljes raktárméret 12 m^2.

    Hány darabot kell legyártani az egyes A, B illetve C típusú gépből a profit maximalizálása érdekében?

    a) Fogalmazza meg a fenti termelésoptimalizálási problémát lineáris program formájában!

    b) Keressen kezdeti bázist!

    c) Oldja meg a lineáris programot a primál vagy a duál szimplex algoritmussal!

    d) Egész értékű eredményt kapott? Ha igen, garantált az egész értékű megoldás?

Megoldások

Szöveges feladatok

1. Egy acélgyárban négyfajta zártszelvényt gyártanak: kis, közepes, nagy és extra nagy méretűt. A gyárban háromfajta gép áll rendelkezésre, A, B, és C. Az alábbi táblázat azt adja meg, hogy az egyes gépek a különböző típusú zártszelvényekből óránként hány méternyit képesek előállítani

	Gép		
Zártszelvény	A	B	C
Kis	3	6	8
Közepes	2	4	7
Nagy	2	3	6
Extra nagy	1	2	3

A gépek hetente 50 órát működhetnek, és az egyes gépek működtetése óránként 3, 5, illetve 8 egységnyi pénzbe kerül. A terv szerint az egyes A, B, C és D típusú zártszelvényekből hetente 200, 80, 60, illetőleg 60 méternyit kell legyártani.

a) Fogalmazza meg a fenti gépütemezési problémát lineáris program formájában!

b) Keressen kezdeti bázist!

c) A primál vagy a duál szimplex algoritmussal oldaná-e meg a feladatot? (Nem kell megoldani!)

Megoldás:

a) Jelölje x_{ij} azt, hogy hány órát fordítunk az i. gépen ($i \in \{1, 2, 3\}$) a j. típusú zártszelvény ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$) gyártására. Ekkor a lineáris program:

$$
\begin{array}{lccccccccccccr}
\min & 3x_{11} & +3x_{12} & +3x_{13} & +3x_{14} & +5x_{21} & +5x_{22} & +5x_{23} & +5x_{24} & +8x_{31} & +8x_{32} & +8x_{33} & +8x_{34} & \\
\text{s.t.} & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & \leq 50 \\
 & & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & \leq 50 \\
 & & & & & & & & & +x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & \leq 50 \\
 & 3x_{11} & & & & +6x_{21} & & & & +8x_{31} & & & & = 200 \\
 & & 2x_{12} & & & & +4x_{22} & & & & +7x_{32} & & & = 80 \\
 & & & 2x_{13} & & & & +3x_{23} & & & & +6x_{33} & & = 60 \\
 & & & & x_{14} & & & & +2x_{24} & & & & +3x_{34} & = 60 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34} & \geq 0
\end{array}
$$

b) A negyedik, ötödik, hatodik és hetedik feltételt akár $\geq$ formába is írhatnánk, nem változna a célfüggvény értéke, hiszen a cél a költségek minimalizálása. Ezen feltételek invertálásával és maximalizálási alakra áttérve:

$$
\begin{array}{lccccccccccccl}
\max & -3x_{11} & -3x_{12} & -3x_{13} & -3x_{14} & -5x_{21} & -5x_{22} & -5x_{23} & -5x_{24} & -8x_{31} & -8x_{32} & -8x_{33} & -8x_{34} & \\
\text{s.t.} & x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & \leq 50 \\
 & & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & \leq 50 \\
 & & & & & & & & & +x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & \leq 50 \\
 & -3x_{11} & & & & -6x_{21} & & & & -8x_{31} & & & & \leq -200 \\
 & & -2x_{12} & & & & -4x_{22} & & & & -7x_{32} & & & \leq -80 \\
 & & & -2x_{13} & & & & -3x_{23} & & & & -6x_{33} & & \leq -60 \\
 & & & & -x_{14} & & & & -2x_{24} & & & & -3x_{34} & \leq -60 \\
 & x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{14}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23}, & x_{24}, & x_{31}, & x_{32}, & x_{33}, & x_{34} & \geq 0
\end{array}
$$

Kanonikus alakú problémát kaptunk, amelyet slack-változókkal standard alakra kell hozni. A célfüggvény együtthatói mind negatívak, tehát a bevezetendő slack-változók duál megengedett kezdeti bázist alkotnak.

c) A fentiek miatt a megoldáshoz érdemes a duál szimplex algoritmust használni.

Lineáris programok grafikus megoldása

2. Tekintsük az alábbi lineáris programot (Figyelem: az változókra nincs előjelmegkötés!):

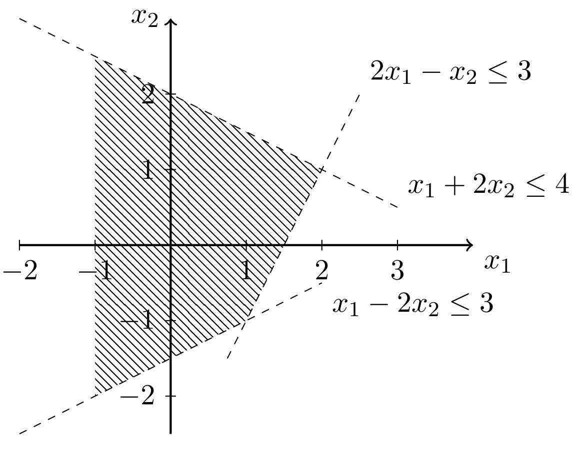
$$
\begin{array}{lcccl}
\max & x_1 & + & x_2 & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq 4 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq 3
\end{array}
$$

a) Oldja meg a lineáris programot *grafikusan*!

b) Oldja meg a lineáris programot (szintén grafikusan), ha a célfüggvényt a $\max -x_1 + x_2$ szerint megváltoztatjuk!

c) Létezik és egyedi-e a megoldás, ha a célfüggvény $\max\ 2x_1 - x_2$? Indokolja válaszát grafikusan!

Megoldás: A megengedett tartomány grafikusan:



a) A célfüggvény normálvektora az $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ vektor, ebből adódik az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ egyedi extrém pont megoldás.

b) Ekkor a célfüggvény normálvektora a $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ szerint módosul, így az optimális megoldás nemkorlátos. Például a $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}-1\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \lambda \geq 0$ sugár mentén haladva a célfüggvény értéke $\frac{3}{2}\lambda$ szerint növekedik.

c) Alternatív optimális megoldások a $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \lambda \in [0,1]$ halmazban.

3. Tekintsük az alábbi lineáris programot:

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & -x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \geq & -1 \\ & & & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

a) Ábrázolja a megengedett tartományt grafikusan!

b) Adja meg a megengedett tartomány extrém pontjait!

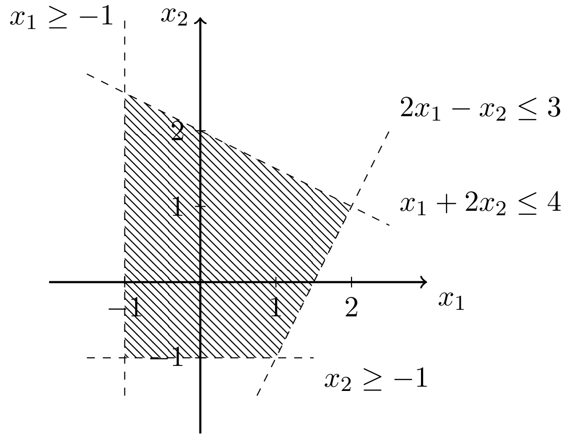
c) Adja meg a lineáris program optimális célfüggvényértékét és egy optimális megoldását!

d) Egyedi a megoldás? Indokolja válaszát!

e) Hogyan változik az optimális célfüggyvényérték és a hozzá tartozó megoldás, ha a célfüggvényt $\min x_1 + x_2$ kifejezésre változtatjuk? Válaszát indokolja a grafikonon is!

Megoldás:

a) A megengedett tartomány grafikusan:



b) Az extrém pontok a grafikus ábrázolásból könnyen kaphatók:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) A megengedett tartomány korlátos, így garantált, hogy az optimális megoldás előáll annak valamely extrém pontján. Konkrétan ott, ahol a $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_e$ szorzat minimális az összes $\boldsymbol{x}_e$ extrém ponton:

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1, \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = 6,$$

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3$$

Ebből az optimális megoldás -3, ami az $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ extrém ponton áll elő.

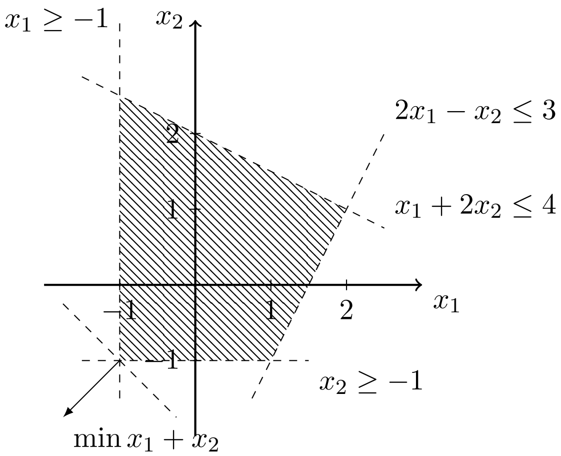
d) A megoldás egyedi, ugyanis a célfüggvény $-x_1 + 2x_2 = -3$ kontúrja csak egy pontban, az $\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ extrém pontban érinti a megengedett tartományt.

e) A célfüggvény $\boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$-ről $\boldsymbol{c'}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$-re változtatása esetén $\boldsymbol{c'}^T\boldsymbol{x}_e$ szorzatok:

$$\boldsymbol{c'}^T\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2, \quad \boldsymbol{c'}^T\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2.5 \end{bmatrix} = 1.5,$$

$$\boldsymbol{c'}^T\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3, \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Ebből az optimális megoldás -2, ami az $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ extrém ponton áll elő. A grafikonon a megváltoztatott célfüggvény szerinti optimalizálás megfelel a megengedett tartomány poliédere és a $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ normálvektorú hipersík érintőpontja meghatározásának.



A szimplex algoritmus használata

4. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \geq & -2 \\
 & x_1 & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

d) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre

- x_4 célfüggvény-együtthatóját 3-ra csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 9-re növeljük,
- ez utóbbi módosítás után x_2 célfüggvény-együtthatóját 9-re növeljük?

Megoldás: Az x_5 és x_6 slack-változók bevezetése és a második feltétel invertálása után a slack-változók triviális kezdeti egységbázist alkotnak. A megoldáshoz ezért a primál szimplex algoritmust használjuk. A kezdeti szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-3	-8	5	-8	0	0	0
x_5	0	2	1	1	3	1	0	7
x_6	0	1	$\boxed{2}$	1	1	0	1	2

Az x_2 belép a bázisba, az x_6 kilép.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	0	9	-4	0	4	8
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	6
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1

Az x_4 belép a bázisba, az x_2 kilép.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	5	8	13	0	0	8	16
x_5	0	-1	-5	-2	0	1	-3	1
x_4	0	1	2	1	1	0	1	2

Optimális szimplex tábla. A megoldás $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, a célfüggvény értéke 16. A megoldás tehát létezik, korlátos, továbbá egyedi is.

A *d)* pont megoldásához érzékenységvizsgálatot kell végezni az optimális szimplex táblán a célfüggvény megváltoztatása mellett.

- x_4 célfüggvény-együtthatója 3-ra csökken: az optimális szimplex táblában x_4 bázisváltozó, így az érzékenységvizsgálat elvégzéséhez úgy kell módosítanunk a szimplex táblát, hogy x_4 sorának $c_4' - c_4 = 3 - 8 = -5$-szörösét hozzá kell adni a nulladik sorhoz és az x_4-hez tartozó elemet nullázni kell.

  A kapott tábla nem primál optimális:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	-2	8	0	0	3	6
x_5	0	-1	-5	-2	0	1	-3	1
x_4	0	1	$\boxed{2}$	1	1	0	1	2

  x_4 kilép a bázisból, x_2 belép, a kapott tábla optimális:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	0	9	1	0	4	8
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	6
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

  Az érzékenységvizsgálat eredménye: x_2 célfüggvény-együtthatójának 3-re csökkentése esetén az optimális megoldás $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (korlátos és egyedi), a célfüggvény értéke 8.

- x_1 célfüggvény-együtthatója 1-re csökken: mivel az optimális szimplex táblában x_1 nembázisváltozó, így célfüggvény-együtthatójának csökkentésére redukált költsége nő ($z_1' = z_1 - (c_1' - c_1) = 5 - (1 - 3) = 7 \geq 0$), ilyenkor a tábla garantáltan optimális marad. A megoldás tehát nem változik.

- x_1 célfüggvény-együtthatója 9-re nő: ebben az esetben x_1 nembázisváltozó redukált költsége csökken: $z_1' = z_1 - (c_1' - c_1) = 5 - (9 - 3) = -1$. Mivel z_1' negatívvá változott, a tábla immár nem optimális, így a primál szimplex algoritmus segítségével ismét optimalizálnunk kell azt. A megváltoztatott szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-1	8	13	0	0	8	16
x_5	0	-1	-5	-2	0	1	-3	1
x_4	0	$\boxed{1}$	2	1	1	0	1	2

  x_1 belép a bázisba, x_4 kilép, a pivot után kapott tábla optimális:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	10	14	1	0	9	18
x_5	0	0	-3	-1	1	1	-2	3
x_1	0	1	2	1	1	0	1	2

  Az érzékenységvizsgálat eredménye: x_1 célfüggvény-együtthatójának 9-re növekedése esetén az optimális megoldás $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, (korlátos és egyedi), a célfüggvény értéke 18.

- Ez utóbbi módosítás után x_2 célfüggvény-együtthatója 9-re nő: x_2 a kapott optimális táblában nembázisváltozó, költsége a változtatás után csökken: $z_2' = z_2 - (c_2' - c_2) = 10 - (9 - 8) = 9 > 0$, tehát a tábla optimális marad.

5. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \max & x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 3x_2 & & & \leq & 9 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

d) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre
   - x_1 célfüggvény-együtthatóját -1-re csökkentjük,
   - x_1 célfüggvény-együtthatóját 2-re növeljük,
   - x_2 célfüggvény-együtthatóját -4-re csökkentjük,
   - x_2 célfüggvény-együtthatóját 3-re növeljük?

Megoldás: Használjuk a primál szimplexet a slack-változók által alkotott kezdeti egységbázisra. A optimális szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	3	0	1	0	0	12
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	6
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	6
x_6	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	15

Ebből az optimális megoldás: $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}^T$, az eredeti változók terében $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T$, a célfüggvény értéke 12.

Az x_5 nembázisváltozóhoz a nulladik sorban $z_5 = 0$ áll, és a bázis nemdegenerált, vagyis a fenti optimális megoldás nem egyedi. Például alternatív optimumok az alábbi halmaz elemei:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq \lambda \leq 18$$

Az eredeti változók terében:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq \lambda \leq 18$$

A *d)* pont megoldásához érzékenységvizsgálatot kell végezni az optimális szimplex táblán a célfüggvény megváltoztatása mellett.

- x_1 célfüggvény-együtthatója -1-re csökken: az optimális szimplex táblában x_1 bázisváltozó, így az érzékenységvizsgálat elvégzéséhez úgy kell módosítanunk a szimplex táblát, hogy x_1 sorának $c_1' - c_1 = -1 - 1 = -2$-szörösét hozzá kell adni a nulladik sorhoz és az x_1-hez tartozó elemet nullázni kell.

  A kapott tábla nem optimális:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	6
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{1}{3}}$	0	6
x_6	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	15

  x_5 belép a bázisba, x_1 kilép.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	2	3	0	1	0	0	12
x_3	0	1	1	1	1	0	0	12
x_5	0	3	2	0	1	1	0	18
x_6	0	-1	3	0	0	0	1	9

  A kapott tábla optimális. Az érzékenységvizsgálat eredménye: x_1 célfüggvény-együtthatójának -1-re csökkentése esetén az optimális megoldás $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$, (korlátos és egyedi), a célfüggvény értéke változatlanul 12. Figyeljük meg, hogy ugyanez a $\lambda = 18$ választás mellett.

- x_1 célfüggvény-együtthatója 2-re nő: ebben az esetben x_1 sorának $c_1' - c_1 = 2 - 1 = 1$-szeresét kell hozzáadni a nulladik sorhoz.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	18
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	6
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	6
x_6	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	15

A kapott tábla optimális, a megoldás nem változik, az optimális célfüggvényérték azonban igen, x_1 „értékének" kétszeresére növekedése 18-re növeli az optimumot. A megoldás most már egyedi, ellentétben az eredeti feladat megoldásával.

- x_2 célfüggvény-együtthatója -4-re csökken: mivel nembázisváltozó célfüggvény-együtthatójának csökkentése sosem módosítja az optimális megoldást, így a tábla marad optimális.
- x_2 célfüggvény-együtthatója 3-re nő: a nulladik sorban x_2 redukált költsége negatívvá változik, hiszen $z_2' = z_2 - (c_2' - c_2) = 3 - (3 - (-2)) = -2 < 0$, így a megoldás a továbbiakban nem optimális. A módosított tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	-2	0	1	0	0	12
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	6
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	6
x_6	0	0	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	15

Az optimális tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{13}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{222}{11}$
x_3	0	0	0	1	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{51}{11}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{3}{11}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{36}{11}$
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{45}{11}$

Az érzékenységvizsgálat eredménye: x_1 célfüggvény-együtthatójának -1-re csökkentése esetén az optimális megoldás $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{11} \\ \frac{45}{11} \\ \frac{51}{11} \end{bmatrix}$, (korlátos és egyedi), a célfüggvény értéke $\frac{222}{11}$.

6. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -12 \\ & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvény értéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

Megoldás: A célfüggvényt invertálva maximalizálási problémára konvertáljuk, majd a második sort invertálva a slack-változók oszlopaiból primál megengedett egységbázist kapunk. A primál szimplexet használva az optimális szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	$\frac{11}{3}$	0	$\frac{20}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{76}{3}$
x_5	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{19}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_4	0	1	0	1	1	0	0	1	4

Az eredményeket invertálni kell, hiszen az eredeti probléma minimalizálási feladat volt. Így a minimalizálási probléma az optimumát az $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8}{3} & 0 & -4 \end{bmatrix}^T$ pontban veszi fel, és itt a célfüggvény értéke $-\frac{76}{3}$. Az optimum egyedi.

7. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \leq & 8 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & \leq & 10 \\ & x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.
b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvényértéket.
c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

Megoldás: Az optimális megoldás nemkorlátos. A kezdeti szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	-3	-2	1	-1	0	0	0	0
x_5	0	2	-4	-1	1	1	0	0	8
x_6	0	1	1	2	-3	0	1	0	10
x_7	0	$\boxed{1}$	-1	-4	1	0	0	1	4

Az x_1 változó belép, x_7 kilép (kiléphetne x_5 is).

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	-5	-11	2	0	0	3	12
x_5	0	0	-2	$\boxed{7}$	-1	1	0	-2	0
x_6	0	0	2	6	-4	0	1	-1	6
x_1	0	1	-1	-4	1	0	0	1	4

Degenerált pivot után:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	$-\frac{57}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{11}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	12
x_3	0	0	$-\frac{2}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0
x_6	0	0	$\boxed{\frac{26}{7}}$	0	$-\frac{22}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	6
x_1	0	1	$-\frac{15}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	4

A primál szimplex utolsó táblája:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{84}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$\frac{57}{26}$	$\frac{37}{26}$	$\frac{327}{13}$
x_3	0	0	0	1	$-\frac{5}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{6}{13}$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{11}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{21}{13}$
x_1	0	1	0	0	$-\frac{18}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{26}$	$\frac{97}{13}$

Ebből látható, hogy x_4 tetszőlegesen növelhető. A nemkorlátosságot okozó sugár tehát a slack-változókkal kibővített, illetve az eredeti változók terében:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{97}{13} \\ \frac{21}{13} \\ \frac{6}{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ \frac{11}{13} \\ \frac{5}{13} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda \geq 0 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{97}{213} \\ \frac{21}{13} \\ \frac{6}{13} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \frac{18}{13} \\ \frac{11}{13} \\ \frac{5}{13} \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \geq 0$$

Ekkor a célfüggvény értéke a $\frac{327}{13} + \lambda \frac{84}{13}, \lambda \geq 0$ szerint alakul.

8. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével:

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & 3x_1 & - & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & 3x_2 & \geq & -3 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & -6 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & 4x_1 & - & x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

a) Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható.

b) Ha létezik, adjon egy optimális megoldást és a hozzá tartozó célfüggvényértéket.

c) Egyedi az optimum? Ha igen, indokolja, miért. Ha nem, adjon alternatív optimális megoldásokat.

Megoldás: Vegyük észre, hogy a változókon nincs előjelmegkötés. Az $x_1 = y_1 - y_2, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ és az $x_2 = y_3 - y_4, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$ helyettesítések után, kanonikus formájú maximalizálási alakba írva:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & -3y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & - & y_4 & & \\ \text{s.t.} & -y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & \leq & 3 \\ & -2y_1 & + & 2y_2 & - & 3y_3 & + & 3y_4 & \leq & 6 \\ & 2y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & - & y_4 & \leq & 8 \\ & 4y_1 & - & 4y_2 & - & y_3 & + & y_4 & \leq & 16 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Slack-változókkal standard alakra áttérve és a primál szimplex algoritmust felhasználva az optimális szimplex tábla:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	RHS
z	1	0	0	0	0	$\frac{11}{9}$	$\frac{8}{9}$	0	0	9
y_2	0	-1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	3
y_4	0	0	0	-1	1	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	0
y_7	0	0	0	0	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{9}$	1	0	14
y_8	0	0	0	0	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{11}{9}$	0	1	28

Az eredeti minimalizálási probléma optimuma -9, amelyet az $x_1 = y_1 - y_2 = -3$, $x_2 = y_3 - y_4 = 0$ pontban vesz fel. Vegyük észre, hogy az optimális szimplex tábla y_1 nembázisváltozóhoz tartozó oszlopában (az első oszlop) y_2 -1 együtthatóval szerepel. Tehát y_1 növelésére y_2 ugyanennyivel csökken, vagyis az $x_1 = y_1 - y_2$ értéke változatlan marad. Ugyanez igaz y_3 és y_4 változókra is. A helyettesített lineáris programnak tehát végtelen sok megoldása van, de ezekhez az eredeti lineáris programban ugyanazok az $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ pontok tartoznak.

9. Oldja meg az alábbi lineáris programot a szimplex algoritmus segítségével. Ügyeljen az egyenlőség és egyenlőtlenség alakú feltételekre.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & \geq & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 8 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & \leq & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

a) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

b) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Létezik korlátos optimális megoldás? Ha nem, mutasson egy sugárt, amely mentén nemkorlátosság igazolható. Ha létezik korlátos optimális megoldás, egyedi az optimum? Ha nem egyedi, adjon altervatív optimális megoldásokat.

c) Változik-e az optimális megoldás és célfüggvényérték, és ha igen, hogyan, abban az esetben, ha rendre

- x_3 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_3 célfüggvény-együtthatóját 12-re növeljük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 1-re csökkentjük,
- x_1 célfüggvény-együtthatóját 7-re növeljük?

Megoldás:

a) Slack-változókkal standard alakra áttérve:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & = & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 8 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & = & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Nincs triviális kezdeti egységbázis, egyedül a harmadik feltétel slack-változóját biztos, hogy érdemes a bázisba választani. A maradék két bázisváltozót a x_7 és x_8 mesterséges változók bevezetésével biztosítjuk.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & + & x_7 & & & = & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & x_8 & = & 8 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & & & & & = & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8 & \geq & 0
\end{array}$$

Az első fázisban tehát a primál szimplex algoritmust használjuk az x_6, x_7 és x_8 változók oszlopai által alkotott kezdeti egységbázisra. Cél az x_7 és x_8 mesterséges változók „eltüntetése”.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcl}
\min & & & & & & & & & & & & & x_7 & + & x_8 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & + & x_7 & & & = & 11 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & & & + & x_8 & = & 8 \\
 & & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & + & x_6 & & & & & = & 10 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6, & & x_7, & & x_8 & \geq & 0
\end{array}
$$

Maximalizálásra áttérve (ne felejtsünk a végén -1-gyel szorozni). Az első fázis táblája a $B = \{x_7, x_8, x_6\}$ változók által meghatározott egységbázisban:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
x_7	0	2	1	-1	1	-1	0	1	0	11
x_8	0	1	1	1	1	0	0	0	1	8
x_6	0	0	-1	2	1	0	1	0	0	10

Még nem szimplex tábla, ahhoz a nulladik sorban a bekeretezett értékeket ki kell nullázni. A kapott tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	-3	-2	0	-2	1	0	0	0	-19
x_7	0	$\boxed{2}$	1	-1	1	-1	0	1	0	11
x_8	0	1	1	1	1	0	0	0	1	8
x_6	0	0	-1	2	1	0	1	0	0	10

b) Futtassuk a primál szimplex algoritmust a kapott táblán. x_1 belép a bázisba, x_7 kilép, stb. Az első fázis optimális táblája:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{3}$
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_6	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$

A célfüggvény értéke 0, így az eredeti feladatnak létezik megengedett megoldása. A mesterséges változók kiléptek a bázisból, így x_1, x_3 és x_6 oszlopa bázisként használható a második fázisban, az x_7 és x_8 oszlopa elhagyható. Beírva az eredeti célfüggvényt (ne felejtsük az együtthatókat invertálni):

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	$\boxed{-3}$	-4	$\boxed{-3}$	-5	0	0	0
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{19}{3}$
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_6	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$

A bekeretezett együtthatókat nullázva szimplex táblát kapunk:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	-1	0	-2	0	0	24
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{19}{3}$
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_6	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$

x_4 belép a bázisba, x_3 kilép.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	1	6	0	2	0	34
x_1	0	1	0	-2	0	-1	0	3
x_4	0	0	1	3	1	1	0	5
x_6	0	0	-2	-1	0	-1	1	5

A kapott tábla optimális. A célfüggvény optimuma 34, a megoldás egyedi mert a nembázisváltozókhoz tartozó értékek a nulladik sorban mind szigorúan pozitívak.

c) Érzékenységvizsgálatot kell végezni az optimális szimplex táblán a célfüggvény megváltoztatása mellett.

- x_3 célfüggvény-együtthatója 1-re csökken: mivel nembázisváltozó célfüggvény-együtthatójának csökkentése nem módosítja az optimális megoldást, így a tábla marad optimális.
- x_3 célfüggvény-együtthatója 12-re nő: a nulladik sorban x_3 redukált költsége negatívvá változik, hiszen $z_3' = z_3 - (c_3' - c_3) = 6 - (12 - 3) = -3 < 0$, így a megoldás a továbbiakban nem optimális. A módosított tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	1	-3	0	2	0	34
x_1	0	1	0	-2	0	-1	0	3
x_4	0	0	1	$\boxed{3}$	1	1	0	5
x_6	0	0	-2	-1	0	-1	1	5

  x_3 belép a bázisba, x_4 kilép, a kapott szimplex tábla optimális:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	2	0	1	3	0	39
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{19}{3}$
x_3	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
x_6	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{20}{3}$

  Vagyis x_3 „értékének” növelésére x_3 felváltja x_4-et a bázisban, tehát az optimális megoldás $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$. Ezzel egy időben a célfüggvény értéke 39-re nő.

- x_1 célfüggvény-együtthatója 1-re csökken: az optimális szimplex táblában x_1 bázisváltozó, így az érzékenységvizsgálat elvégzéséhez úgy kell módosítanunk a szimplex táblát, hogy x_1

sorának $c_1' - c_1 = 1 - 3 = -2$-szeresét hozzá kell adni a nulladik sorhoz és az x_1-hez tartozó elemet nullázni kell.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	1	10	0	4	0	28
x_1	0	1	0	-2	0	-1	0	3
x_4	0	0	1	3	1	1	0	5
x_6	0	0	-2	-1	0	-1	1	5

A tábla marad optimális, így az optimális megoldás nem változik, de a célfüggvényérték 28-ra csökken.

- x_1 célfüggvény-együtthatója 7-re nő: most x_1 sorának $c_1' - c_1 = 7 - 3 = 4$-szeresét kell hozzáadni a nulladik sorhoz.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	1	-2	0	-2	0	46
x_1	0	1	0	-2	0	-1	0	3
x_4	0	0	1	$\boxed{3}$	1	1	0	5
x_6	0	0	-2	-1	0	-1	1	5

x_3 belép a bázisba, x_4 kilép. A végső optimális szimplex tábla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	3	4	2	0	0	56
x_1	0	1	1	1	1	0	0	8
x_5	0	0	1	3	1	1	0	5
x_6	0	0	-1	2	1	0	1	10

Az optimális megoldás $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ezzel egy időben a célfüggvény értéke 56-ra nő.

A dualitás

10. Tekintsük a 4. feladatban adott lineáris programot:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr} \max & 3x_1 & + & 8x_2 & - & 5x_3 & + & 8x_4 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\ & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & \geq & -2 \\ & x_1 & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Írja fel a lineáris program duálisát és hozza standard alakra! A feladat megoldásához használja az alábbi táblázatot:

	Maximalizálási probléma		**Minimalizálási probléma**	
Feltétel	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	**Változó**
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	tetszőleges	
Változó	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	**Feltétel**
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
	tetszőleges	$\longleftrightarrow$	$=$	

b) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

c) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Egyedi az optimum? Ha nem, adjon altervatív optimális megoldásokat.

d) Vesse össze a kapott optimális megoldást a 4. feladatban kapott megoldással! Mit tudunk a primál és a duál optimális megoldásainak kapcsolatáról?

Megoldás:

a) Bevezetve a w_1 és w_2' duális változókat rendre az első és a második sorhoz, a kapott duális:

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min & 7w_1 & - & 2w_2' & & \\
\text{s.t.} & 2w_1 & - & w_2' & \geq & 3 \\
 & w_1 & - & 2w_2' & \geq & 8 \\
 & w_1 & - & w_2' & \geq & -5 \\
 & 3w_1 & - & w_2' & \geq & 8 \\
 & w_1 & & & \geq & 0 \\
 & & & w_2' & \leq & 0
\end{array}
$$

A standard alak megadásához az alábbi módosításokat kell elvégeznünk:

- át kell térnünk maximalizálási alakra a célfüggvény invertálásával (a kapott megoldást majd szorozni kell -1-gyel),
- w_2' jelenleg nempozitív, így a $w_2 = -w_2'$ helyettesítéssel nemnegatív változóra kell konvertálni (az együtthatóinak előjele közben szintén változik),
- végül slack-változókat kell bevezetni az összes sorhoz.

A kapott standard alak:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & -7w_1 & - & 2w_2 & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2w_1 & + & w_2 & - & w_3 & & & & & & & = & 3 \\
 & w_1 & + & 2w_2 & & & - & w_4 & & & & & = & 8 \\
 & w_1 & + & w_2 & & & & & - & w_5 & & & = & -5 \\
 & 3w_1 & + & w_2 & & & & & & & - & w_6 & = & 8 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3 & & w_4 & & w_5 & & w_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) A kapott standard alakban a slack-változók kezdeti duál-megengedett (primál-optimális) bázist alkotnak, így használhatnánk a duál szimplex módszert. Ehelyett most, gyakorlásképpen, vezessünk be mesterséges változókat.

Első lépésként a RHS együtthatóit kell pozitívvá tenni, ehhez invertáljuk a 3. feltételt.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & -7w_1 & - & 2w_2 & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & 2w_1 & + & w_2 & - & w_3 & & & & & & & = & 3 \\
 & w_1 & + & 2w_2 & & & - & w_4 & & & & & = & 8 \\
 & -w_1 & - & w_2 & & & & & + & w_5 & & & = & 5 \\
 & 3w_1 & + & w_2 & & & & & & & - & w_6 & = & 8 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3 & & w_4 & & w_5 & & w_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

w_5 slack-változó oszlopa alkothatja a bázis egyik oszlopát, a maradékot w_7, w_8 és w_9 mesterséges változók bevezetésével kaphatjuk meg. A célfüggvényt módosítjuk a mesterséges változók eliminálása céljából: $\min w_7 + w_8 + w_9 = -\max -w_7 - w_8 - w_9$. (A végén ne felejtsük invertálni a kapott célföggvényértéket!)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & & & & & & & & & & & & & -1 & - & 1 & - & 1 & & \\
\text{s.t.} & 2w_1 & + & w_2 & - & w_3 & & & & & & & + & w_7 & & & & & = & 3 \\
 & w_1 & + & 2w_2 & & & - & w_4 & & & & & & & + & w_8 & & & = & 8 \\
 & -w_1 & - & w_2 & & & & & + & w_5 & & & & & & & & & = & 5 \\
 & 3w_1 & + & w_2 & & & & & & & - & w_6 & & & & & + & w_9 & = & 8 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3, & & w_4, & & w_5, & & w_6, & & w_7, & & w_8, & & w_9 & \geq & 0
\end{array}
$$

A kezdeti bázis tehát a w_5, w_7, w_8 és w_9 változók oszlopaiból alkotott egységmátrix.

c) A feladatot táblázatba írva (ne felejtsük a nulladik sort invertálni):

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
w_7	0	2	1	-1	0	0	0	1	0	0	3
w_8	0	1	2	0	-1	0	0	0	1	0	8
w_5	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	5
w_9	0	3	1	0	0	0	-1	0	0	1	8

A kapott alak még nem szimplex tábla, mert a nulladik sor bekeretezett elemei nemzérók. Vonjuk ki a w_7, w_8 és w_9 sorát a nulladik sorból:

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	RHS
z	1	-6	-4	1	1	0	1	0	0	0	-19
w_7	0	$\boxed{2}$	1	-1	0	0	0	1	0	0	3
w_8	0	1	2	0	-1	0	0	0	1	0	8
w_5	0	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0	5
w_9	0	3	1	0	0	0	-1	0	0	1	8

w_1 belép a bázisba, w_7 kilép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	RHS
z	1	0	-1	-2	1	0	1	3	0	0	-10
w_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
w_8	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{13}{2}$
w_5	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{13}{2}$
w_9	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$

w_3 belép a bázisba, w_9 kilép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	RHS
z	1	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{3}$
w_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
w_8	0	0	$\frac{5}{3}$	0	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
w_5	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{23}{3}$
w_3	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$

w_2 belép a bázisba, w_8 kilép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
w_1	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
w_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
w_5	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{49}{5}$
w_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{17}{5}$

Optimális táblát kaptunk, vége az első fázisnak. A célfüggvény értéke 0, így az eredeti feladatnak létezik megengedett megoldása. A mesterséges változók kiléptek a bázisból, így w_7, w_8 és w_9 oszlopa elhagyható.

A duális feladat célfüggvényét a táblába írva (ne felejtsük el invertálni az együtthatókat):

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	RHS
z	1	$\boxed{7}$	$\boxed{2}$	0	0	0	0	0
w_1	0	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
w_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
w_5	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{49}{5}$
w_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{17}{5}$

Még nem szimplex tábla, ahhoz ki kell nulláznunk a bekeretezett elemeket a nulladik sorban:

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	RHS
z	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$	$-\frac{88}{5}$
w_1	0	1	0	0	$\boxed{\frac{1}{5}}$	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
w_2	0	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
w_5	0	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{49}{5}$
w_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{17}{5}$

w_4 belép a bázisba, w_1 kilép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	RHS
z	1	1	0	0	0	0	2	-16
w_4	0	5	0	0	1	0	-2	8
w_2	0	3	1	0	0	0	-1	8
w_5	0	2	0	0	0	1	-1	13
w_3	0	1	0	1	0	0	-1	5

Optimális szimplex táblát kaptunk, vége a második fázisnak. Az optimális célfüggvényérték -16, az eredeti minimalizálási duál probléma célfüggvényértéke tehát 16. Az optimális megoldás $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, egyedi.

d) A dualitás erős tétele miatt a primál optimális célfüggvényértéke (16) megegyezik a duál optimális célfüggvényértékével (16).

A komplementaritás tulajdonságának felhasználásával további összefüggések figyelhetők meg: például tudjuk, hogy ha egy duál változó optimális értéke pozitív, akkor a hozzá tartozó sor a primálban éles:

$$w_2 > 0 \Rightarrow -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -2$$

Hasonlóan, ha egy feltétel a primálban nem éles, a hozzá tartozó duál változó optimális értéke nulla:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 < 7 \Rightarrow w_1 = 0$$

Továbbá: primál változó pozitív optimális értéke esetén a hozzá tartozó duál feltétel éles, és nem éles duál feltétel esetén a hozzá tartozó optimális probálmegoldás nulla:

$$x_4 > 0 \Rightarrow 3w_1 - w_2' = 3w_1 + w_2 = 8$$
$$2w_1 - w_2' = 2w_1 + w_2 > 3 \Rightarrow x_1 = 0$$

11. Tekintsük a 6. feladatban adott lineáris programot:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & -2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & \leq & 6 \\
 & -2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -12 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Írja fel a lineáris program duálisát és hozza standard alakra! A feladat megoldásához használja az alábbi táblázatot:

	Maximalizálási probléma		**Minimalizálási probléma**	
Feltétel	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	**Változó**
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	tetszőleges	
Változó	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	**Feltétel**
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
	tetszőleges	$\longleftrightarrow$	$=$	

b) Keressen kezdeti bázist! Ha szükséges, vezessen be mesterséges változókat.

c) Oldja meg a kapott lineáris programot a megfelelő szimplex algoritmus segítségével! Egyedi az optimum? Ha nem, adjon altervatív optimális megoldásokat.

d) Vesse össze a kapott optimális megoldást a 6. feladatban kapott megoldással! Mit tudunk a primál és a duál optimális megoldásainak kapcsolatáról?

Megoldás:

a) Invertálva az első és a harmadik sort (hogy ne kapjunk nempozitív duál változókat) és bevezetve a w_1, w_2 és w_3 duális változókat rendre az első, második és harmadik sorhoz, a kapott duális:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & -6w_1 & - & 12w_2 & - & 4w_3 & & \\
\text{s.t.} & -w_1 & - & 2w_2 & - & w_3 & \leq & -2 \\
 & -2w_1 & - & 3w_2 & & & \leq & -2 \\
 & -4w_1 & + & w_2 & - & w_3 & \leq & 3 \\
 & w_1 & - & w_2 & - & w_3 & \leq & -5 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

A standard alak megadásához slack-változókat kell bevezetni az összes sorhoz.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\max & -6w_1 & - & 12w_2 & - & 4w_3 & & & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & -w_1 & - & 2w_2 & - & w_3 & + & w_4 & & & & & & & = & -2 \\
 & -2w_1 & - & 3w_2 & & & & & + & w_5 & & & & & = & -2 \\
 & -4w_1 & + & w_2 & - & w_3 & & & & & + & w_6 & & & = & 3 \\
 & w_1 & - & w_2 & - & w_3 & & & & & & & + & w_7 & = & -5 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3, & & w_4, & & w_4, & & w_6, & & w_7 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) A kapott standard alakban a slack-változók kezdeti duál-megengedett (primál-optimális) egységbázist alkotnak, így használhatjuk a duál szimplex módszert.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	6	12	4	0	0	0	0	0
w_4	0	-1	-2	-1	1	0	0	0	-2
w_5	0	-2	-3	0	0	1	0	0	-2
w_6	0	-4	1	-1	0	0	1	0	3
w_7	0	1	-1	$\boxed{-1}$	0	0	0	1	-5

w_7 kilép a bázisból, w_3 belép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	10	8	0	0	0	0	4	-20
w_4	0	-2	-1	0	1	0	0	-1	3
w_5	0	-2	-3	0	0	1	0	0	-2
w_6	0	-5	2	0	0	0	1	-1	8
w_3	0	-1	1	1	0	0	0	-1	5

w_5 kilép a bázisból, w_2 belép.

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	$\frac{14}{3}$	0	0	0	$\frac{8}{3}$	0	4	$-\frac{76}{3}$
w_4	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{11}{3}$
w_2	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
w_6	0	$-\frac{19}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1	$\frac{20}{3}$
w_3	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{13}{3}$

A kapott tábla optimális. Az optimális célfüggvényérték $-\frac{76}{3}$, az optimális duálváltozók értékei: $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$, egyedi.

c) A dualitás erős tétele miatt a primál optimális célfüggvényértéke megegyezik a duál optimális célfüggvényértékével.

A komplementaritás tulajdonságának felhasználásával további összefüggések figyelhetők meg: például tudjuk, hogy ha egy duál változó optimális értéke pozitív, akkor a hozzá tartozó sor a primálban éles, és ha egy feltétel a primálban nem éles, a hozzá tartozó duál változó optimális értéke nulla:

$$w_2 > 0 \Rightarrow -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -12$$
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 < 6 \Rightarrow w_1 = 0$$

Továbbá: primál változó pozitív optimális értéke esetén a hozzá tartozó duál feltétel éles, és nem éles duál feltétel esetén a hozzá tartozó optimális probálmegoldás nulla:

$$x_4 > 0 \Rightarrow w_1 - w_2 - w_3 = -5$$
$$-w_1 - 2w_2 - w_3 < -2 \Rightarrow x_1 = 0$$

Szöveges feladatok megoldása a szimplex algoritmussal

12. Egy papírgyárban lecserélik a munkagépeket. Kétfajta kartonvágó gépet szerezhetnek be: az A típusú gép 3 dobozt tud kivágni egy perc alatt, egy személy kell a működtetéséhez és 15 ezer egységnyi pénzbe kerül, a B típusú gép ezzel szemben 5 dobozt tud készíteni, de a felügyeletéhez két ember kell és 20 ezer egységnyi pénzbe kerül. A termelési terv percenként legalább 32 doboz legyártása legfeljebb 12 munkás alkalmazása mellett.

    Hány A és B típusú gépet kell beszereznie a papírgyárnak a termelési terv végrehajtásához úgy, hogy a gépek beszerzési költségeit minimalizáljuk?

    a) Fogalmazza meg a fenti beszerzési problémát lineáris program formájában!

b) Keressen kezdeti bázist!

c) Oldja meg a lineáris programot a primál vagy a duál szimplex algoritmussal!

d) Egész értékű eredményt kapott? Ha igen, garantált az egész értékű megoldás?

Megoldás:

a) Jelölje az A típusú gépből beszerzendő mennyiséget x_A, és a B típusúból beszerzendő mennyiséget x_B. A munkaerőkorlát:

$$x_A + 2x_B \leq 12$$

A termelési tervben szereplő 32 dobozos cél az alábbi feltételt adja:

$$3x_A + 5x_B \geq 32$$

A beszerzési költség:

$$15x_A + 20x_B$$

Természetesen a változók nemnegatívak. Ebből a lineáris program:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\min & 15x_A & + & 20x_B & & \\
\text{s.t.} & x_A & + & 2x_B & \leq & 12 \\
 & 3x_A & + & 5x_B & \geq & 32 \\
 & x_A, & & x_B & \geq & 0
\end{array}$$

b) Slack-váltoizókkal standard alakra hozva, a második feltétel invertálásával és maximalizálási alakra áttérve:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & -15x_A & - & 20x_B & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_A & + & 2x_B & + & s_1 & & & = & 12 \\
 & -3x_A & - & 5x_B & & & + & s_2 & = & -32 \\
 & x_A, & & x_B, & & s_1, & & s_2 & \geq & 0
\end{array}$$

A slack-változók duál megengedett kezdeti egységbázist alkotnak.

c) Értelemszerűen a duál szimplex algoritmust fogjuk használni. A kezdeti szimplex tábla:

	z	x_A	x_B	s_1	s_2	RHS
z	1	15	20	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	12
s_2	0	-3	$\boxed{-5}$	0	1	-32

A duál szimplex algoritmus további iterációi:

	z	x_A	x_B	s_1	s_2	RHS
z	1	3	0	0	4	-128
s_1	0	$\boxed{-\frac{1}{5}}$	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$
x_B	0	$\frac{3}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{32}{5}$

Végül az optimális tábla:

	z	x_A	x_B	s_1	s_2	RHS
z	1	0	0	15	10	-140
x_A	0	1	0	-5	-2	4
x_B	0	0	1	3	1	4

A gyárnak 4-4 gépet kell beszereznie 140 ezer egységnyi pénzért, és összesen $4 + 2 * 4 = 12$ munkást kell alkalmaznia.

d) Az eredmény egész értékű, ez azonban nem garantált. Ahhoz a változókon egészértékűségi megkötést kéne alkalmazni.

13. Egy szerszámgépgyárban háromfajta gépet gyártanak: az A, B és C típusú gépeket. A legyártott gépeket a termelési periódus végéig raktárban tárolják. Az egyes gépek legyártásához szükséges munkaidőt, a gépenként termelt profitot, illetve a géptípusonként szükséges raktárhely nagyságát az alábbi táblázat foglalja össze.

	Gép		
Géptípus	A	B	C
Szükséges munkaidő [egység/gép]	2	2	1
Raktározási igény [m^2/gép]	1	1	2
Profit [egység/gép]	3	3	2

Az C típusú gép elkészítéséhez egy speciális alkatrészre van szükség, amelyből a termelési periódus alatt csak 15 darab áll rendelkezésre. A termelési periódusban 12 egységnyi munkaidő fordítható a gépek legyártására, a teljes raktárméret 12 m^2.

Hány darabot kell legyártani az egyes A, B illetve C típusú gépből a profit maximalizálása érdekében?

a) Fogalmazza meg a fenti termelésoptimalizálási problémát lineáris program formájában!

b) Keressen kezdeti bázist!

c) Oldja meg a lineáris programot a primál vagy a duál szimplex algoritmussal!

d) Egész értékű eredményt kapott? Ha igen, garantált az egész értékű megoldás?

Megoldás:

a) Jelölje az A típusú gépből beszerzendő mennyiséget x_A, a B típusúból beszerzendő mennyiséget x_B, és a C típusúból beszerzendő mennyiséget x_C.

A munkaidőkorlát:

$$2x_A + 2x_B + x_C \leq 12$$

A raktározási korlát:

$$x_A + x_B + 2x_C \leq 12$$

A C típusú gépből csak 15 darabot tudunk legyártani, mert a speciális alkatrészből csak ennyi áll rendelkezésre.

$$x_C \leq 15$$

A termelődő profit:

$$3x_A + 3x_B + 2x_C$$

Természetesen a változók nemnegatívak. Ebből a lineáris program:

$$\begin{array}{rccccccl}
\max & 3x_A & + & 3x_B & + & 2x_C & & \\
\text{s.t.} & 2x_A & + & 2x_B & + & x_C & \leq & 12 \\
 & x_A & + & x_B & + & 2x_C & \leq & 12 \\
 & & & & & x_C & \leq & 15 \\
 & x_A, & & x_B, & & x_C & \geq & 0
\end{array}$$

b) Az s_1, s_2, s_3 slack-változókkal standard alakra hozva a slack-változók primál megengedett kezdeti egységbázist alkotnak.

c) Értelemszerűen a primál szimplex algoritmust fogjuk használni. A kezdeti szimplex tábla:

	z	x_A	x_B	x_C	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	-3	-3	-2	0	0	0	0
s_1	0	$\boxed{2}$	2	1	1	0	0	12
s_2	0	1	1	2	0	1	0	12
s_3	0	0	0	1	0	0	1	15

A primál szimplex algoritmus további iterációi:

	z	x_A	x_B	x_C	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	18
x_A	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	6
s_2	0	0	0	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	6
s_3	0	0	0	1	0	0	1	15

Végül az optimális tábla:

	z	x_A	x_B	x_C	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	20
x_A	0	1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_C	0	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	4
s_3	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	11

A gyárnak 4-4 darabot kell gyártania az A és C típusú gépekből és B típusú gépet nem kell gyártani. A keletkezett profit 20 egység.

d) Az eredmény egész értékű, ez azonban nem garantált. Ahhoz a változókon egészértékűségi megkötést kéne alkalmazni.