Klasszikus alkalmazások

- Termelésoptimalizálás
- Hozzárendelési probléma: folytonos eset
- Arbitrázsárazás

Termelésoptimalizálás

- A gazdasági élet és a logisztika területén gyakran találkozunk lineáris optimalizálási feladatokkal
- Ezek közül is a leggyakoribb a termelésoptimalizálás
- Egy vállalat korlátozott erőforrásokat vesz igénybe termékek előállítására
- A termékeket eladhatja, profitot realizálva, vagy későbbi nagyobb profit reményében raktározhatja
- Cél az erőforrások allokációja a profit maximalizálásához
- Feltételezések
  - a termékek és a igények függetlenek
  - az erőforrások tetszőleges mértékben megoszthatók
  - hosszú periódusokra (negyedévekre) tervezhetőek az árak és az igények
  - a költségek lineárisak

Termelésoptimalizálás

- Tegyük fel, hogy adott
  - a periódusok száma T, a termékek száma I és az erőforrások száma K
  - a_{ik}: az i termék előállításához szükséges k erőforrás mennyisége
  - b_{kt}: a k erőforrás mennyisége a t periódusban
  - d_{it}: igény az i termékre a t periódusban
  - c_{it}: az i termék egységén jelentkező profit a t periódusban
  - q_{it}: az i termék egységének raktározási költsége a t periódusban
- A változók legyenek
  - x_{it}: az i termékből előállított mennyiség a t periódusban
  - y_{it}: raktárkészlet i termékből a t periódus végén

Termelésoptimalizálás

- Az előállított és raktározott mennyiség minden periódusban találkozik az igényekkel az erőforrás-kapacitások figyelembevétele mellett
- Profit maximalizálása, raktározási költségek minimalizálása
- Legyen az induló raktárkészlet $y_{i0} = 0$ minden i esetén

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} c_{it} x_{it} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} q_{it} y_{it} & \\
\text{s.t.} \quad & y_{i,t-1} + x_{it} - y_{it} = d_{it} & i \in \{1, \ldots, I\}, t \in \{1, \ldots, T\} \\
& \sum_{i=1}^{I} a_{ik} x_{it} \leq b_{kt} & k \in \{1, \ldots, K\}, t \in \{1, \ldots, T\} \\
& x_{it}, y_{it} \geq 0 & i \in \{1, \ldots, I\}, t \in \{1, \ldots, T\}
\end{aligned}
$$

Termelésoptimalizálás

- A termelésoptimalizálási problémának számtalan verziója létezik
- Az igények várakoztathatók
- Az erőforrások kiválthatók egymással, piaci áruk adott és mi döntjük el, miből mennyit veszünk
- Az erőforrások is raktározhatók az egyes periódusok közt
- A legegyszerűbb eset: csak egy periódusra kell tervezni
- Ebben az esetben nem kell a raktárkészletet optimalizálni
- Tegyük fel, hogy a piac korlátlan mennyiséget fel tud venni minden termékből
- Így az egyes termékekből előállított mennyiséget csak a szükséges erőforrások mennyisége és a jövedelmezőség határozza meg

Termelésoptimalizálás

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{i=1}^{I} c_i x_i & \\
\text{s.t.} \sum_{i=1}^{I} a_{ik} x_i \le b_k & \qquad i \in \{1, \dots, I\} \\
x_i \ge 0 & \qquad i \in \{1, \dots, I\}
\end{aligned}
$$

- A „klasszikus” termelésoptimalizálási probléma
- A szimplex algoritmust először ilyen problémákra használták
- c_i, b_k és a_{ik} mindig nemnegatív
- Slack-változókkal standard alakra hozott lineáris program: triviális primál megengedett kezdeti egységbázis

Termelésoptimalizálás: példa

- Az ACME Pincészet háromfajta bort gyárt: fehéret, vöröset és egy cuvée bort, háromfajta szőlőből (G1, G2 és G3)
  - a fehér bor egy hektoliteréhez 2 tonna G1 szőlő és 1 tonna G2 szőlő kell
  - a vörös bor hektoliteréhez 2 tonna G3 szőlő kell
  - a cuvée egy hektoliteréhez mindhárom fajta szőlőből 1 tonna kell
- A G1 szőlőből 8 tonna, a G2-ből 4 tonna, a G3-ból 6 tonna érhető el
- A fehér boron hektoliterenként 31 ezer, a vörösön 22 ezer, a cuvée boron 35 ezer forint nyereség van
- **Kérdés:** mennyit kell az egyes borokból termelni a nyereség maximalizálása érdekében?

Termelésoptimalizálás: példa

	Szőlőigény [t/hl] G1	G2	G3	Profit [e Ft/hl]
Fehér bor	2	1		31
Vörös bor			2	22
Cuvée bor	1	1	1	35
Felhasználható szőlő [t]	8	4	6	

- Legyen x_1, x_2 és x_3 rendre a fehér, vörös és cuvée borokból megtermelt mennyiség ([hl])

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 31x_1 & + & 22x_2 & + & 35x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & & & + & x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & & & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Termelésoptimalizálás: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-31	-22	-35	0	0	0	0
x_4	0	2	0	1	1	0	0	8
x_5	0	1	0	$\boxed{1}$	0	1	0	4
x_6	0	0	2	1	0	0	1	6

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	4	-22	0	0	35	0	140
x_4	0	1	0	0	1	-1	0	4
x_3	0	1	0	1	0	1	0	4
x_6	0	-1	$\boxed{2}$	0	0	-1	1	2

Termelésoptimalizálás: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-7	0	0	0	24	11	162
x_4	0	$\boxed{1}$	0	0	1	-1	0	4
x_3	0	1	0	1	0	1	0	4
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	0	7	17	11	190
x_1	0	1	0	0	1	-1	0	4
x_3	0	0	0	1	-1	2	0	0
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	3

- A fehér borból 4, a vörösből 3 hektolitert kell készíteni, cuvéet idén nem csinálunk, a profit 190 ezer forint

Termelésoptimalizálás: példa

- A várakozások szerint a következő évben a megnövő kereslet miatt a cuvée bor ára nőni fog, hektoliterenként 44 ezer forintra, míg a többi bor ára változatlan marad
- **Kérdés:** hogyan alakítsa az ACME Pincészet a következő évi termelését?
- Érzékenységvizsgálat: a célfüggvény megváltozik
- Egészen pontosan egy bázisváltozóhoz tartozó elem változik a szimplex táblában $c_3 = 35 \to c_3' = 44$
- A nulladik sorhoz hozzá kell adni x_3 sorát (a tábla második sora!) pontosan $c_3' - c_3 = 9$-szer
- Vigyázat: a nulladik sor x_3-hoz tartozó eleme 0 marad
- A kapott tábla nem primál optimális: primál szimplex

Termelésoptimalizálás: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	0	-2	35	11	190
x_1	0	1	0	0	$\boxed{1}$	-1	0	4
x_3	0	0	0	1	-1	2	0	0
x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	3

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	2	0	0	0	33	11	198
x_4	0	1	0	0	1	-1	0	4
x_3	0	1	0	1	0	1	0	4
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

- Jövőre csak vörös (1 hl) és cuvée (4 hl) bort csinálunk
- Viszont megmarad 4 tonna G1 szőlő (mert $x_4 = 4$)

Termelésoptimalizálás: példa

- **Kérdés:** mennyire kellene növekednie a fehér bor árának ahhoz, hogy megérje termelni? Hogy alakul a termelés, ha 2 hektoliter fehér bort termelünk ekkor?
- A lineáris program a x_1 nembázisváltozó terében

$$
\begin{array}{ll}
\max & 198 - 2x_1 \\
\text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x_1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

- Ha 2 ezer forinttal növekedne a fehér bor ára, már nem csökkenne a célfüggvény értéke
- Ha 2 hektolitert termelnénk belőle, akkor a cuvéeből 2 hektolitert termelnénk csak, a felszabaduló G3 szőlőből pedig még egy hektoliter vöröset készíthetnénk

Általánosított hozzárendelési probléma

- Adott m ügynök és n feladat, amelyeket ütemezni kell az ügynökök között
- Minden feladatot minden ügynök el tud végezni, de különböző hatékonysággal
  - az i ügynök a j feladatot w_{ij} munkaráfordítással végezheti el, és ekkor p_{ij} profit termelődik
  - minden i ügynöknek legfeljebb w_i kiosztható munkaegysége van
  - minden j feladatból b_j mennyiségűt kell elvégezni
- Cél a profit maximalizálása
- Tegyük fel, hogy a feladatok tetszőlegesen megoszthatók
- Ha nem, egész értékű lineáris programot kapunk

Általánosított hozzárendelési probléma

- Jelezze x_{ij} az i ügynök által a j feladatból elvégzett mennyiséget

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} && \\
&\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{ij} \le w_i && i \in \{1, \dots, m\} \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j && j \in \{1, \dots, n\} \\
&x_{ij} \ge 0 && i \in \{1, \dots, m\}, \\
& && j \in \{1, \dots, n\}
\end{aligned}
$$

Gépterhelési probléma: példa

- Az ACME Acélgyár kis, közepes és nagy méretű acélgerendákat gyárt. A gyár A és B gépsorokkal rendelkezik, amelyek az egyes méretű acélgerendákból az alábbi mennyiséget képesek előállítani óránként

Gerendatípus	Gép [db/óra]		Igény [db/hét]
	A	B	
Kis méretű	3	6	96
Közepes méretű	2	4	96
Nagy méretű	2	3	72

  A táblázat szintén tartalmazza a különböző típusú gerendákból felmerülő heti igényt. A gépenkénti gépidő hetente 40 óra, a munkahét szintén 40 munkaórából áll. A gépek óránként 8 illetve 4 ezer forint költséggel üzemeltethetőek
- **Kérdés:** hogyan ütemezzük az egyes gépek termelését?

Gépterhelési probléma: példa

- Jelezze x_{1A} a kis méretű gerendákból az *A* gépsoron termelt mennyiséget [db]. Hasonlóan a többi méretre
- Az *A* gépsor $\frac{x_{1A}}{3}$ órát fordít kis méretű gerendák termelésére
- Ez is hozzárendelési probléma

$$\begin{aligned}
\min \quad & 8\left(\frac{x_{1A}}{3} + \frac{x_{2A}}{2} + \frac{x_{3A}}{2}\right) + 4\left(\frac{x_{1B}}{6} + \frac{x_{2B}}{4} + \frac{x_{3B}}{3}\right) \\
& \frac{x_{1A}}{3} + \frac{x_{2A}}{2} + \frac{x_{3A}}{2} \le 40 \\
& \frac{x_{1B}}{6} + \frac{x_{2B}}{4} + \frac{x_{3B}}{3} \le 40 \\
& x_{1A} + x_{1B} = 96 \\
& x_{2A} + x_{2B} = 96 \\
& x_{3A} + x_{3B} = 72 \\
& x_{1A}, x_{2A}, x_{3A} \ge 0 \\
& x_{1B}, x_{2B}, x_{3B} \ge 0
\end{aligned}$$

Gépterhelési probléma: példa

- Egyszerűbb, ha x_{1A} inkább azt a gépidőt jelzi, amit az A gépsoron a kis méretű gerendák termelésére lefoglalunk [óra]. Hasonlóan a többi méretre

$$
\begin{aligned}
\min \quad 8(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 4(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) \\
x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 40 \\
x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \leq 40 \\
3x_{1A} + 6x_{1B} = 96 \\
2x_{2A} + 4x_{2B} = 96 \\
2x_{3A} + 3x_{3B} = 72 \\
x_{1A}, x_{2A}, x_{3A} \geq 0 \\
x_{1B}, x_{2B}, x_{3B} \geq 0
\end{aligned}
$$

- Kézenfekvőbb folytonos változókkal modellezni
- De még mindig előállhat tört számú gerenda

Gépterhelési probléma: példa

- Standard alakra hozzuk x_7 és x_8 slack-változók hozzáadásával
- A kezdeti bázis meghatározásához bevezetjük x_9, x_{10} és x_{11} mesterséges változókat
- Az első fázis (még nem szimplex tábla), z oszlopát elhagyjuk

	x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	RHS
z	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
x_7	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	40
x_8	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	40
x_9	3	6	0	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	0	96
x_{10}	0	0	2	4	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	96
x_{11}	0	0	0	0	2	3	0	0	0	0	$\boxed{1}$	72

Gépterhelési probléma: példa

- Az első fázis optimális szimplex táblája

	x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	RHS
z	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_{3A}	0	0	0	0	1	0	-3	-6	1	$\frac{3}{2}$	2	24
x_{2B}	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	24
x_{3B}	0	0	0	0	0	1	2	4	$-\frac{2}{3}$	-1	-1	8
x_{1A}	1	0	1	0	0	0	4	6	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	16
x_{1B}	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-2	-3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	8

- A célfüggvény értéke 0, vagyis a kapott bázis megengedett
- A mesterséges változók kiléptek a bázisból: oszlopaik elhagyhatók

Gépterhelési probléma: példa

- Az eredeti probléma minimalizálási probléma
- A második fázis kezdeti táblája (még nem szimplex tábla)

	x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	x_7	x_8	RHS
z	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	8	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	0	0	0
x_{3A}	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0	-3	-6	24
x_{2B}	0	0	$\frac{1}{2}$	$\boxed{1}$	0	0	0	0	24
x_{3B}	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	2	4	8
x_{1A}	$\boxed{1}$	0	1	0	0	0	4	6	16
x_{1B}	0	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	-2	-3	8

Gépterhelési probléma: példa

- A második fázis optimális szimplex táblája

	x_{1A}	x_{1B}	x_{2A}	x_{2B}	x_{3A}	x_{3B}	x_7	x_8	RHS
z	2	0	2	0	0	0	0	8	-448
x_{3A}	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	36
x_{2B}	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	24
x_7	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	$\frac{3}{2}$	4
x_{3B}	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1	0
x_{1B}	$\frac{1}{2}$	1	0	0	0	0	0	0	16

- A kis méretű gerendából 0 illetve 16, a közepesből 0 ill. 24, a nagyból 36 ill. 0 óra gépidőt ütemezünk az A ill. B gépsoron
- A költség 448 ezer forint, az A gép 4 óra holtidővel, a B teljes kihasználtsággal üzemel

Gépterhelési probléma: példa

- Az ACME Acélgyár menedzsmentje úgy dönt, hogy racionalizálja a gépsorok munkaidejét
- Mivel a B gépsor teljes kihasználtságon üzemel, érdemes lenne ezt egy új műszak beállításával hosszabban üzemeltetni
- **Kérdés:** hogyan alakul a költség és a gépek ütemezése a B gépsor munkaidejének növelése függvényében?
- Paramétervizsgálat a RHS perturbációjával: tegyük fel, hogy a B gép munkaideje $b_B = 40 + \lambda$
- Hogyan alakul a megoldás és a költség λ függvényében?

$$\bar{\boldsymbol{b}}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{e}_2 = (\boldsymbol{B}^{-1})_2$$

ahol $(\boldsymbol{B}^{-1})_2$ a $\boldsymbol{B}^{-1}$ második oszlopa

Gépterhelési probléma: példa

- Meg kell keresnünk $\boldsymbol{B}^{-1}$ mátrixot, vagy legalábbis a második oszlopát
- Vegyük észre, hogy az eredeti problémában x_8 slack-változó oszlopa éppen $\boldsymbol{e}_2$
- Ezért az x_8 oszlopában mindig megjelenik az aktuális bázis inverzének második oszlopa

$$\bar{\boldsymbol{b}}' = (\boldsymbol{B}^{-1})_2 = \boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ebből $S = \{1\}$, $r = 1$, $\bar{\lambda} = -\frac{\bar{b}_1}{\bar{b}'_1} = -\frac{36}{-\frac{3}{2}} = 24 = \lambda_1$

Gépterhelési probléma: példa

- A $\lambda \in [0, 24]$ tartományban az adott bázis optimális

$$z(\lambda) = \boldsymbol{c_B}^T(\bar{\boldsymbol{b}} + \lambda \bar{\boldsymbol{b}}') = -448 + 8\lambda$$

$$\boldsymbol{x}(\lambda) = \begin{bmatrix} x_{3A} \\ x_{2B} \\ x_7 \\ x_{3B} \\ x_{1B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ 4 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda$$

- Ha a B gépsor munkaidejét 64 órára növelnénk, akkor az összes termelés már ezen a gépsoron történne
- A költség közben $448 - 8\lambda = 256$ ezer forintra csökkenne
- A paramétervizsgálat vége: a duál szimplex pivot után kapott bázis minden $\lambda \geq 24$-re optimális

Arbitrázsárazás

- Adott n piaci eszköz, melyekkel egy **diszkrét piaci modell** szerint működő piacon kereskedünk
- A piac a kereskedési periódus végén m lehetséges kimeneti állapot egyikében lehet: az i kimeneti állapot esetén a j piaci eszközön elért haszon r_{ij} (lehet negatív is)
- A piacon kétféleképpen lehet kereskedni
  - hosszú pozíció: veszünk a j eszközből a kereskedési periódus elején, amit eladunk a periódus végén
  - „short" pozíció: eladunk a j eszközből és vállaljuk, hogy a periódus végén visszavásároljuk
- **Arbitrázs opció:** olyan long és short pozíciókból álló befektetési egyveleg (portfólió), amelyen minden lehetséges kimeneti állapot esetén nyereség van
- **Kérdés:** létezik-e arbitrázs opció a piacon?

Arbitrázsárazás

- Legyen x_j a j eszköz súlya a portfólióban
- Hosszú pozíció ($x_j > 0$): a kereskedés végén visszakapunk $(1 + r_{ij})x_j$ összeget (feltételezve a i állapot bekövetkeztét)
- A nettó nyereség $r_{ij}x_j$, vagyis áremelkedésre játszunk
- Short pozíció ($x_j < 0$): először kapunk $|x_j|$ összeget, majd végül visszavásároljuk az eszközt $(1 + r_{ij})|x_j|$ összegért
- Nyereség van, ha $r_{ij} < 0$, vagyis árcsökkenésre játszunk
- Legyen a haszonmátrix egy $m \times n$ mátrix: $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]$
- Az i-edik kimenet esetén a haszon: $\sum_j r_{ij}x_j$
- Arbitrázs opció van, ha minden lehetséges kimenet esetén hasznot realizálunk a befektetésen

$$\exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{Rx} > \boldsymbol{0}$$

Arbitrázsárazás: példa

- Tegyük fel, hogy egy piacon $n = 2$ eszköz van és a piac a kereskedési periódus végén $m = 3$ állapot valamelyikében lehet
- A haszon az egyes kimeneti állapotok esetén az alábbi haszonmátrix szerint alakul

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- Legyen a portfóliónk $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, ahol x_1 az első és x_2 a második eszközből tartott pozíció
- Long pozíció: $x_i > 0$, short pozíció: $x_i < 0$

Arbitrázsárazás: példa

- Ha az első állapot következik be akkor a haszon $-\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{8}x_2$, nyereség van ha ez pozitív
- Például ha az első eszközből egységnyi short pozíciót ($x_1 = -1$) és a másodikból egységnyi long pozíciót ($x_2 = 1$) tartunk, akkor a profit $\frac{3}{8}$
- Ugyanez a portfolió a második kimeneti állapot esetén is nyereséges (a profit $\frac{1}{4}$)
- Sőt, a harmadik esetén is (a profit $\frac{1}{5}$)
- Arbitrázsopció van, hiszen van olyan portfolió, amely minden lehetséges kimenet esetén (vagyis nulla kockázattal) profitot hoz
- „Normális” piacokon nemkívánatos

Arbitrázsárazás

- Arbitrázsopció van tehát, ha $\exists \boldsymbol{x} : \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$
- „$>$” feltétel figyelembevétele lineáris programozásban általában nehézségekbe ütközik
- Tekintsük az alábbi, kevésbé szigorú, lineáris programot

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{0}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Legyen $\boldsymbol{p}^T$ a feltételekhez tartozó duális változók m-sorvektora
- A duál lineáris program

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{0} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{p}^T \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Arbitrázsárazás

- Mindkét lineáris programra igaz, hogy egy megengedett megoldás egyből optimális is
- Triviális megoldáspár az $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{p}^T = \mathbf{0}$
- Mi a triviálistól eltérő $\boldsymbol{x}$ primál megoldásokat keresünk, melyre $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$
- Ehelyett inkább a duál nemtriviális megoldásait vizsgáljuk
- **Arbitrázsárazási tétel:** akkor és csak akkor van $\boldsymbol{x}$, melyre, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, ha nincs $\boldsymbol{p}^T$ mely teljesíti az alábbi feltételeket

$$\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{R} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{p}^T \geq \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{p}^T \neq \mathbf{0}$$

- **Biz.:** Farkas-lemma $\square$
- És viszont, ha van $\boldsymbol{p}^T$: $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{p}^T \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{p}^T \neq \mathbf{0}$ akkor nincs arbitrázsopció

Arbitrázsárazás

- Tegyük fel, hogy létezik a tétel feltételeinek megfelelő $\boldsymbol{p}^T \neq \mathbf{0}$, természetesen $\boldsymbol{p}^T \geq \mathbf{0}$
- Normalizáljuk úgy, hogy $\boldsymbol{p}^T \mathbf{1} = 1$
- Így $\boldsymbol{p}^T$ elemei a kimeneti állapotok valószínűségeként értelmezhetőek
- Ekkor $\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{R} = \mathbf{0}$ miatt tetszőleges $\boldsymbol{x}$ portfólióra a nyereség várható értéke: $\mathbb{E}(\text{profit}) = \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{x} = 0$
- A tétel értelmezése tehát, hogy csak abban az esetben *nincs* arbitrázs opció, ha van egy olyan valószínűségi vektor, amelyre minden befektetés fair (várható nyeresége 0)

Arbitrázsárazás: példa

- Egy piacon két értékpapír árára köthetünk opciós ügyleteket
- A két papír kompetitív cégekhez tartozik: ha az egyik papír ára nő, a másiké csökken és viszont
- Lehetséges továbbá, hogy a piacon nem történik átrendeződés, ekkor az első papír nem, a második minimális bevételt hoz

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

- **Kérdés:** van-e arbitrázs opció, és ha igen, milyen portfólióhoz tartozik?

Arbitrázsárazás: példa

- Keresünk $\boldsymbol{x}$ vektort úgy, hogy $\boldsymbol{Rx} > \boldsymbol{0}$
- Ha van megoldás, akkor minden $\lambda > 0$-ra $\lambda\boldsymbol{x}$ is megoldás, tehát $\boldsymbol{Rx}$ tetszőlegesen naggyá tehető
- Elég tehát csak az alábbi lineáris programot megoldani

$$\begin{array}{ll} \max & \boldsymbol{0x} \\ & \boldsymbol{Rx} \geq \boldsymbol{1} \end{array}$$

- Legyen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-$ és $\boldsymbol{x}_s$ a slack-változók vektora

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \max & \boldsymbol{0x}^+ & + & \boldsymbol{0x}^- & + & \boldsymbol{0x}_s & & \\ \text{s.t.} & -\boldsymbol{Rx}^+ & + & \boldsymbol{Rx}^- & + & \boldsymbol{x}_s & = & -\boldsymbol{1} \\ & \boldsymbol{x}^+, & & \boldsymbol{x}^-, & & \boldsymbol{x}_s, & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}$$

- $\boldsymbol{x}_s$ oszlopai duál megengedett kezdeti egységmátrix bázist alkotnak: duál szimplex

Arbitrázsárazás: példa

- A kezdeti szimplex tábla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1	0	0	-1
x_6	0	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	0	1	0	-1
x_7	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	1	-1

- Az optimális tábla

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	1	0	-1	-10	0	-10	20
x_6	0	0	0	0	-1	1	-1	1
x_1	1	0	-1	0	-10	0	-15	25

Arbitrázsárazás: példa

- Találtunk arbitrázs opciót: az első papírból 25, a másodikból 20 egység long pozíciót kell beszerezni
- A kereskedés végén a nettó nyereség $\boldsymbol{Rx} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Ha $\boldsymbol{R}$ egy elemében változik: $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$
- Ekkor nincs arbitrázs opció
- Ha az egyes kimenetek $\boldsymbol{p}^T = [\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}]$ valószínűséggel következnek be, akkor minden portfólió fair