Szimplex indítása és analízise

- Kezdeti bázis keresése: a mesterséges változók módszere
- Lineáris programok megoldásának analízise
- Érzékenységvizsgálat: a célfüggvény megváltoztatásának hatása az optimális megoldásra
- Paraméteranalízis: a RHS perturbációja

Emlékeztető: a szimplex tábla

- Tekintsük az alábbi lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy m-oszlopvektor, $\boldsymbol{x}$ pedig n-oszlopvektor
- Legyen $\boldsymbol{B}$ egy megengedett bázis
- A szimplex tábla

	z	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_N}$	RHS	
z	1	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	0. sor
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1..m sorok

Emlékeztető: a szimplex tábla

- Optimalitási feltétel: $\forall j \in N : z_j \geq 0$
- A bázisba belép: $x_k : k = \operatorname*{argmin}_{j \in N} z_j$
- Nemkorlátos, ha nincs pozitív elem k oszlopában: $\boldsymbol{y}_k \leq 0$
- A bázisból kilép $x_{B_r} : r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\dots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$

	z	$x_{B_1} \dots x_{B_r} \dots x_{B_m}$	$\dots x_{N_j} \dots x_{N_k} \dots$	RHS
z	1	$0 \;\dots\; 0 \;\dots\; 0$	$\dots\; z_j \;\dots\; z_k \;\dots$	z_0
x_{B_1}	0	$1 \;\dots\; 0 \;\dots\; 0$	$\dots\; y_{1j} \;\dots\; y_{1k} \;\dots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$0 \;\dots\; 1 \;\dots\; 0$	$\dots\; y_{rj} \;\dots\; y_{rk} \;\dots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$0 \;\dots\; 0 \;\dots\; 1$	$\dots\; y_{mj} \;\dots\; y_{mk} \;\dots$	$\bar{b}_m$

Emlékeztető: a szimplex indítása

- A szimplex algoritmus használatához ismerünk kell egy kezdeti megengedett bázist
- Kanonikus formában adott lineáris programok esetén gyakran könnyen leolvasható
- **Maximalizálási feladat:** $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$
- Standard formában: $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$
- Ha $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, akkor a slack változók primál-megengedett kezdeti egységbázist alkotnak: **primál szimplex**
- Kanonikus formában adott **minimalizálási feladat:**

$$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

- Duál-megengedett kezdeti egységbázis a slack-változók oszlopain, ha $\boldsymbol{c}^T \geq 0^T$: **duál szimplex**

A szimplex algoritmus indítása

- Általánosan: kezdeti primál-megengedett bázismegoldás keresése a standard alakban adott lineáris programhoz

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy m-oszlopvektor, $\boldsymbol{x}$ pedig n-oszlopvektor
- Feltesszük továbbá, hogy $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$ (ha van $i : b_i < 0$, akkor szorozzuk az i-edik sort (-1)-gyel)
- Ha $\boldsymbol{A}$ oszlopai közt van egységmátrix, akkor ez lesz a bázis
- Felírjuk a szimplex táblát és a nulladik sorban a bázishoz tartozó esetleges nemnulla elemeket elemi sorműveletekkel kinullázzuk

Mesterséges változók módszere

- Tegyük fel, hogy egyik kezdetibázis-kereső ötletünk sem működik
- Vezessük be a $\boldsymbol{x_a}$ mesterséges változókat és tekintsük az alábbi módosított lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \min \quad & \mathbf{1}^T \boldsymbol{x_a} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x_a} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_a} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

  ahol $\mathbf{1}^T$ egy (megfelelő méretű) sorvektor, melynek minden eleme 1
- Rögtön kaptunk egy kezdeti megengedett bázist
- Mivel $\boldsymbol{x_a}$ oszlopai egységmátrixot alkotnak, így $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ a feltételek miatt

Mesterséges változók módszere

- Oldjuk meg a módosított lineáris programot a fenti kezdeti bázisról
- Legyen az optimum $z_0 = \mathbf{1}^T \boldsymbol{x_a}$ (a mesterséges változók összege)
- **Tétel:** ha $z_0 > 0$, akkor az eredeti lineáris programnak nincs megengedett megoldása
- **Biz.:** tegyük fel, hogy $z_0 > 0$ de eredeti lineáris programnak létezik megengedett megoldása
- Tehát létezik $\boldsymbol{x_0}$: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{b}$
- Ekkor $\boldsymbol{x_a} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_0} = \mathbf{0}$ és így $\mathbf{1}^T \boldsymbol{x_a} = 0 < z_0$, ami ellentmond a feltevésnek, hogy z_0 optimális $\square$
- Ha viszont $z_0 = 0$ akkor $\boldsymbol{x_a} = \mathbf{0}$, ekkor az eredeti lineáris programnak van megengedett megoldása
- A kapott optimális bázisról továbbfuttathatjuk a szimplexet

A két fázisú szimplex algoritmus

- Első fázis: kezdeti bázis keresése
- Oldjuk meg az $\boldsymbol{x_a}$ mesterséges változókkal kibővített módosított lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & -\mathbf{1}^T \boldsymbol{x_a} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x_a} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_a} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- Ha $\boldsymbol{x_a} \neq \mathbf{0}$, nincs megoldás
- Legyen $\boldsymbol{x_a} = \mathbf{0}$ és tegyük fel, hogy a mesterséges változók mind kiléptek a bázisból (ha nem, akkor a maradék mesterséges változókat is ki kell léptetni a bázisból, ezzel most nem foglalkozunk)
- Második fázis: kitöröljük a mesterséges változókat, visszaírjuk az eredeti célfüggvényt és továbbfuttatjuk a szimplex algoritmust

Két fázisú szimplex: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\min & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 18 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Írjuk át maximalizálásra
- Vezessünk be slack-változókat (ügyeljünk a $\geq$ feltételre és hogy $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$!)

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & 3x_1 & - & 4x_2 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & = & 18 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Két fázisú szimplex: példa

- Nincs triviális kezdeti (primál vagy duál megengedett) egységbázis
- Mesterséges változók bevezetése: elég a második sorhoz egy x_5 mesterséges változót adni
- x_3 és x_5 együtt egységmátrix bázist fog adni
- Az első fázisban a követező lineáris programot kell megoldani

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & & & & & & & & & -x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & = & 18 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Két fázisú szimplex: példa

- Kezdeti bázis: $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_3} \quad \boldsymbol{a_5}]$, $\boldsymbol{c_B}^T = [0 \quad -1]$, $\boldsymbol{c_N}^T = \mathbf{0}$
- Nem szimplex tábla: a nulladik sorban az egyik bázisváltozóhoz (x_5) nemzéró érték áll
  - „pivot”: x_5 sorát ki kell vonni z sorából

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	0	0	$\boxed{1}$	0
x_3	0	1	1	1	0	0	4
x_5	0	2	3	0	-1	$\boxed{1}$	18

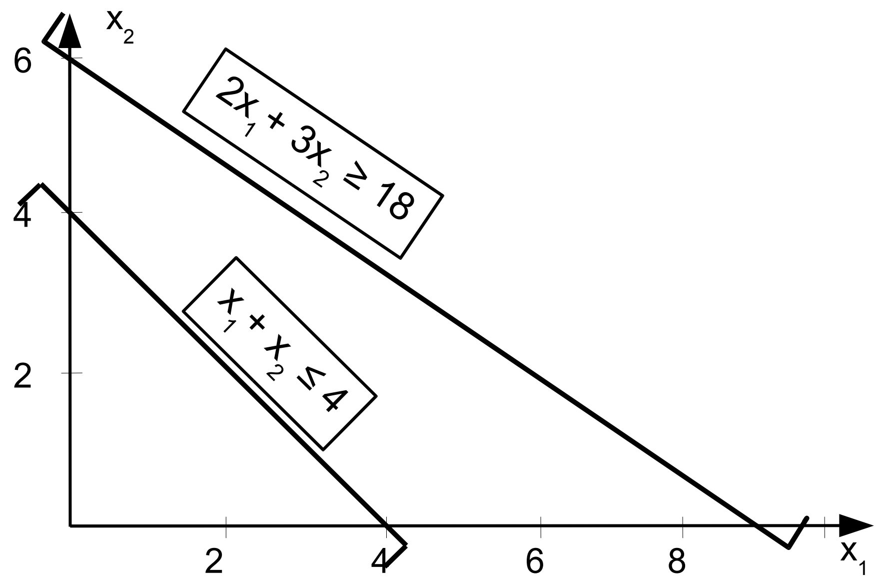
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	-3	0	1	0	-18
x_3	0	1	$\boxed{1}$	1	0	0	4
x_5	0	2	3	0	-1	1	18

Két fázisú szimplex: példa

- A pivot után optimális tábla: a célfüggvény értéke -6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	3	1	0	-6
x_2	1	1	1	0	0	4
x_5	-1	0	-3	-1	1	6

- Mivel $\min x_5 = 6$, a mesterséges változót nem tudtuk eliminálni
- Az eredeti lineáris programnak nincs megengedett megoldása



Két fázisú szimplex: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$\begin{array}{lrcrcr} \min & x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Az első sort invertáljuk, hogy $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$ igaz legyen
- Az első két sorhoz hozzáadunk egy-egy mesterséges változót, a harmadik sorhoz a slack-változót használjuk

$$\begin{array}{lrrrrrrrcr} \max & & & & & & -x_6 & -x_7 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & & = & 2 \\ & -x_1 & +x_2 & & -x_4 & & & +x_7 & = & 1 \\ & & x_2 & & & +x_5 & & & = & 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0 \end{array}$$

Két fázisú szimplex: példa

- A nulladik sort még rendbe kell hozni: 2 pivot

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	0	0	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	0
x_6	0	1	1	-1	0	0	$\boxed{1}$	0	2
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	$\boxed{1}$	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	1	0	-2	1	1	0	0	0	-3
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	0	-1	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	3

Két fázisú szimplex: példa

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	-2	0	1	-1	0	0	2	-1
x_6	$\boxed{2}$	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	0	0	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Két fázisú szimplex: példa

- Optimális tábla: vége az első fázisnak
  - a célfüggvény értéke 0
  - a mesterséges változók kiléptek a bázisból
  - így $x_6 = x_7 = 0$, elhagyhatók
- Az eredeti célfüggvény: $\min x_1 - 2x_2 = -\max -x_1 + 2x_2$
- A szimplex táblába írva az előjelek megfordulnak!
- Megint nem szimplex tábla: két pivot

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	$\boxed{1}$	$\boxed{-2}$	0	0	0	0
x_1	$\boxed{1}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Két fázisú szimplex: példa

- Második fázis

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	3	0	-2	0	0	4
x_4	2	0	-1	1	0	1
x_2	1	1	-1	0	0	2
x_5	-1	0	$\boxed{1}$	0	1	1

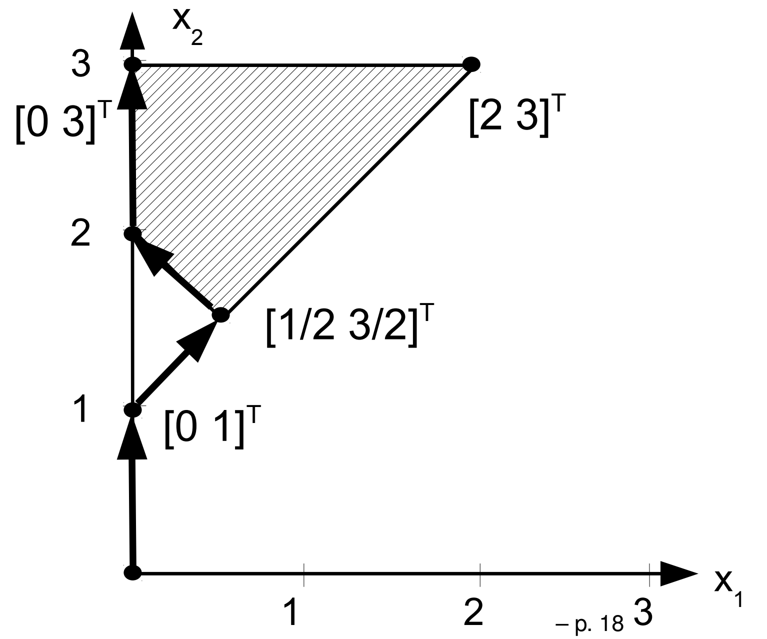
Két fázisú szimplex: példa

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	0	2	6
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	-1	0	1	0	1	1

- Az első fázisban az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

pontkon keresztül a megengedett tartomány egy extrém pontjába jutottunk



Érzékenységvizsgálat

- A lineáris programok gyakran olyan valós problémákat modelleznek, melyek paraméterei bizonytalanok, mérési hibával vagy zajjal terheltek
- Egy termelési problémában bizonytalan lehet a beszerzési ár, vagy újabb erőforrások vásárlásával bővíthetőek a kapacitások
- Kérdés, hogy a $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ lineáris program optimális megoldása hogyan függ a modell paramétereinek változásaitól
  - most csak azt az esetet vizsgáljuk, ha változás áll be a $\boldsymbol{c}^T$ célfüggvényben
  - hasonló módon kezelhető a változás $\boldsymbol{b}$ RHS vektorban vagy a feltételrendszer $\boldsymbol{A}$ mátrixában
- Lényeg, hogy ne kelljen a megváltoztatott lineáris programot nulláról újra megoldani

A célfüggvény változtatása

- Legyen $\boldsymbol{B}$ a $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ lineáris program egy optimális bázisa
- Vizsgáljuk, hogyan változik a megoldás és a célfüggvény értéke, ha a célfüggvény $\boldsymbol{c}^T$ vektorában a k-adik változó költségtényezőjét c_k-ról c'_k-re változtatjuk
- Az eredeti lineáris program szimplex táblája $\boldsymbol{B}$ bázisban

	z	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_N}$	RHS	
z	1	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	0. sor
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1..m sorok

- $\boldsymbol{B}$ (primál) megengedett, ha $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$
- $\boldsymbol{B}$ (primál) optimális, ha $\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T \geq \boldsymbol{0}$

A célfüggvény változtatása

1.) Nembázisváltozó költsége változik ($x_k : k \in N$)

$$\boldsymbol{c_N}^T \rightarrow (\boldsymbol{c'_N})^T = \boldsymbol{c_N} + (c'_k - c_k)\boldsymbol{e_k}^T$$

- Ebben az esetben a szimplex tábla $1, \ldots, m$ soraiban nincs változás, csak a nulladik sor módosul

$$\boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T \rightarrow \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - (\boldsymbol{c_N}')^T =$$
$$\boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T - (c'_k - c_k)\boldsymbol{e_k}^T$$

- A nulladik sorban tehát csak az x_k nembázisváltozóhoz tartozó elem változik

$$z_k \rightarrow z'_k = z_k - (c'_k - c_k)$$

A célfüggvény változtatása

- Ha $z_k - (c'_k - c_k) \geq 0$, akkor a $\boldsymbol{B}$ bázis marad optimális
- Például ha egy nembázisváltozó költségét **csökkentjük**, a bázis mindig optimális marad
- A célfüggvény értéke nem változik (x_k marad 0)
- Ha ellenben $z_k - (c'_k - c_k) < 0$, akkor $\boldsymbol{B}$ nem optimális az új költségfüggvény szerint
- Futtassuk tovább a primál szimplex algoritmust a $\boldsymbol{B}$ bázisról amíg megkapjuk az új optimumot
- Ezzel a módszerrel nem kell lefuttatni a kétfázisú szimplex algoritmust elölről
- Ehelyett egy, az eredeti problémában optimális bázisról fut tovább a szimplex algoritmus
- Ez az érzékenységvizsgálat célja

A célfüggvény változtatása

2.) Bázisváltozó költsége változik ($x_k : k \in B$)

- Legyen tehát most x_k a t-edik bázisváltozó: $x_k \equiv x_{B_t}$

$$\boldsymbol{c_B}^T \to (\boldsymbol{c'_B})^T = \boldsymbol{c_B} + (c'_{B_t} - c_{B_t})\boldsymbol{e_t}^T$$

- Ismét csak a szimplex tábla nulladik sora változik
- A bázisváltozókhoz, így x_{B_t}-hez is, továbbra is nulla tartozik
- A j-edik nembázisváltozóhoz tartozó elem

$$z'_j = (\boldsymbol{c'_B})^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j = \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j - c_j + \\ [0 \quad 0 \ \dots \ c'_{B_t} - c_{B_t} \ \dots \quad 0]\boldsymbol{y_j} = z_j + (c'_{B_t} - c_{B_t})y_{tj}$$

- A nulladik sorhoz hozzá kell adni $c'_{B_t} - c_{B_t}$-szer x_{B_t} sorát
- Majd az x_{B_t}-hez tartozó elemet külön nullázni kell

A célfüggvény változtatása: példa

- Oldjuk meg az alábbi lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- A slack-változók primál megengedett kezdeti bázist alkotnak

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	-2	1	-1	0	0	0
x_4	0	$\boxed{1}$	1	1	1	0	6
x_5	0	-1	2	0	0	1	4

A célfüggvény változtatása: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	3	1	2	0	12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

- Optimális táblát kaptunk, a bázisváltozók $B = \{1, 5\}$
- Csökkentsük $c_2 = -1$-et $c'_2 = -3$-ra. Mivel x_2 nincs a bázisban, ezért a nulladik sorban csak z_2 változik: $z'_2 = z_2 - (c'_2 - c_2) = 3 - (-3 - (-1)) = 5$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	5	1	2	0	12
...	...	...	...	...	...	...	...

- A tábla továbbra is optimális, a változók és a célfüggvény értéke nem változik

A célfüggvény változtatása: példa

- Ha most az x_2 költségét $c_2' = 3$-ra változtatjuk, akkor $z_2' = -1$
- Ez a tábla már nem optimális: primál szimplex

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	-1	1	2	0	12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	$\boxed{3}$	1	1	1	10

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{46}{3}$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

A célfüggvény változtatása: példa

- Most tegyük fel, hogy egy bázisváltozó, x_1 költsége változik $c_1 = 2$-ről nullára
- Az eredeti probléma optimális szimplex táblája

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	3	1	2	0	12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

- Hozzá kell adnunk az első sort a nulladikhoz pontosan $c_1' - c_1 = -2$-szer (vagyis a dupláját ki kell vonnunk)

A célfüggvény változtatása: példa

- Elvégezve a műveletet változik a célfüggvény értéke is

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	$\boxed{-2}$	1	-1	0	0	0
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

- Mivel valójában csak a nembázisváltozókhoz tartozó elemeket kell módosítani a nulladik sorban, x_1 együtthatóját egyszerűen kinullázzuk

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	1	-1	0	0	0
x_1	0	1	1	$\boxed{1}$	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

A célfüggvény változtatása: példa

- A kapott tábla nem optimális: primál szimplex
- Az optimális tábla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	1	2	0	1	0	6
x_3	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	-1	2	0	0	1	4

- Mivel az x_1-en elért „profit” kettőről nullára csökkent, érdemes ezért a megoldásban x_1-et nullára csökkenteni és helyette x_3-at növelni (helyettesítő termékek)
- A RHS változása hasonlóan kezelhető: RHS változása a primálban = célfüggvény változása a duálban
- Elvégezzük a fenti analízist a duálon

Paramétervizsgálat

- Az érzékenységvizsgálat során arra a kérdésre kerestük a választ, hogyan változik az optimum bizonyos modellparaméterek függvényében
- Egyszerre csak egy jellemzőt változtattunk
- A gyakorlatban gyakran felmerül a kérdés, mi történik, ha több jellemző egyidejűleg változik
- Például egy termelési problémában a költségek egy bizonyos függvény szerint változhatnak
- Paramétervizsgálat
    - most csak azt az esetet vizsgáljuk, ha a RHS vektort perturbáljuk egy adott irányban
    - a célfüggvény perturbációja is vizsgálható a módszerrel
    - célfüggvény perturbációja a primálon = RHS perturbációja a duálon

A RHS perturbációja

- Tekintsük a lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy m-oszlopvektor, és $\boldsymbol{x}$ pedig n-oszlopvektor
- Most tegyük fel, hogy a RHS $\boldsymbol{b}$ vektorát egy $\boldsymbol{b}'$ irányban perturbáljuk, miközben a probléma többi jellemzője változatlan marad: $\boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{b}', \lambda \geq 0$
- Vizsgáljuk az optimum és a megoldás alakulását $\lambda \geq 0$-ra

A RHS perturbációja

- A primál szimplex táblán vizsgálódunk
- Legyen B egy optimális bázis

	z	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_N}$	RHS	
z	1	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c_N}^T$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	0. sor
$\boldsymbol{x_B}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1..m sorok

- Mivel a tábla optimális $\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c_N}^T \geq \mathbf{0}$
- Ez nem tartalmazza $\boldsymbol{b}$-t, ezért a tábla marad primál optimális minden λ-ra. Kérdés, meddig primál megengedett
- $\boldsymbol{b}$ perturbálásával csak a RHS oszlop változik $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}')$ szerint, továbbá a célfüggvény értéke $\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}')$ szerint
- A tábla egész addig primál megengedett marad, amíg a RHS nemnegatív: $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b}+\lambda\boldsymbol{b}') = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\lambda(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}') \geq \mathbf{0}$

A RHS perturbációja

- Legyen $S = \{i : \bar{b}'_i < 0\}$, ahol $\bar{b}'_i$ a $\bar{\boldsymbol{b}}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}'$ vektor i-edik eleme
- Ha $S = \emptyset$, akkor $\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{b} + \lambda\boldsymbol{b}') \geq \mathbf{0}$ minden $\lambda \geq 0$-ra, és így $\boldsymbol{B}$ bázis optimális és megengedett marad a paraméter tetszőleges megválasztása mellett
- Különben keressük, melyik $\bar{b}_i + \lambda\bar{b}'_i$ lesz először negatív

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in S} \left(-\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}'_i} \right), \qquad \bar{\lambda} = \min_{i \in S} \left(-\frac{\bar{b}_i}{\bar{b}'_i} \right) = -\frac{\bar{b}_r}{\bar{b}'_r}$$

- Ha $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda} = \lambda_1$ akkor $\boldsymbol{B}$ megengedett (és optimális)
- A célfüggvény és a változók értéke

$$z(\lambda) = {\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}}^T(\bar{\boldsymbol{b}} + \lambda\bar{\boldsymbol{b}}'), \qquad \boldsymbol{x}(\lambda) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} + \lambda\bar{\boldsymbol{b}}' \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

A RHS perturbációja

- $\lambda > \bar{\lambda}$-ra azonban a $\boldsymbol{B}$ bázis már nem megengedett
- Duál szimplex pivot x_{B_r} változón
- Ha nincs blokkoló változó (vagyis x_{B_r} sora csupa nemnegatív elemet tartalmaz), akkor a primál problémának nincs megengedett megoldása $\lambda > \bar{\lambda}$ választás esetén
- Ellenkező esetben egy új táblát kapunk, és megkeressük azt a $\bar{\lambda} = \lambda_2$ paramétert, ameddig az új bázis megengedett
- Addig folytatjuk, amíg
  - vagy $S = \emptyset$ adódik: ekkor az aktuális bázis optimális $\forall \lambda > \bar{\lambda}$-ra
  - vagy a duál szimplex pivot során nem találunk blokkoló változót: ekkor nincs megengedett megoldás $\forall \lambda > \bar{\lambda}$-ra

A RHS perturbációja: példa

- Keressük az alábbi lineáris program optimális megoldását a RHS vektor perturbációja mellett

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 6-\lambda \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6+\lambda \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Értelemszerűen $\boldsymbol{b} = [6 \quad 6]^T$, $\boldsymbol{b'} = [-1 \quad 1]^T$
- x_3, x_4 slack-változókkal kiegészítve a megoldás $\lambda = 0$-ra

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	14
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

A RHS perturbációja: példa

- Kérdés, hogy az aktuális $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ bázis milyen tartományban optimális
- Vegyük észre, hogy az x_3 és x_4 slack-változók oszlopai az eredeti problémában egységmátrixot alkottak, így a szimplex táblában a megfelelő oszlopok pont $\boldsymbol{B}$ inverzét adják ki

$$\bar{\boldsymbol{b}}' = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ebből $S = \{1\}$, $r = 1$, $\bar{\lambda} = -\frac{\bar{b}_1}{\bar{b}'_1} = -\frac{2}{-1} = 2 = \lambda_1$

A RHS perturbációja: példa

- Tehát a $\lambda \in [0, 1]$ tartományban a célfüggvény értéke és az optimális megoldás

$$z(\lambda) = \boldsymbol{c_B}^T(\bar{\boldsymbol{b}} + \lambda \bar{\boldsymbol{b}}') = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda [1 \quad 3] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 14 - \lambda$$

$$\boldsymbol{x}(\lambda) = \begin{bmatrix} x_1(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{b}} + \lambda \bar{\boldsymbol{b}}' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \lambda \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Látható, hogy $\lambda > 2$ esetén $x_1 < 0$ az aktuális bázisban

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$14 - \lambda$
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\boxed{-\frac{1}{3}}$	$2 - \lambda$
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

A RHS perturbációja: példa

- Válasszunk $\lambda = 2$-t és duál szimplex pivot az x_1 bázisváltozón: x_4 belép a bázisba

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	2	0	3	0	12
x_4	0	-3	0	-2	1	0
x_2	0	1	1	1	0	4

- Most $\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} \bar{b}_4 \\ \bar{b}_2 \end{bmatrix}$ és a $\bar{\boldsymbol{b}}' = \begin{bmatrix} \bar{b}'_4 \\ \bar{b}'_2 \end{bmatrix}$ értékét keressük a $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ és a $\boldsymbol{b}' = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ szerint
- A tábla 3. és 4. oszlopából képzett mátrixszal kell szorozni

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \bar{\boldsymbol{b}}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A RHS perturbációja: példa

- Ekkor $S = \{2\}$, $r = 2$, $\bar{\lambda} = -\frac{\bar{b}_2}{\bar{b}'_2} = -\frac{6}{-1} = 6 = \lambda_2$
- Tehát a $\lambda \in [2, 6]$ tartományban a célfüggvény értéke és a megoldás

$$z(\lambda) = \boldsymbol{c_B}^T(\bar{\boldsymbol{b}} + \lambda\bar{\boldsymbol{b}}') = [0 \quad 3]\begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda[0 \quad 3]\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 18 - 3\lambda$$

$$x_1(\lambda) \equiv 0, \qquad \begin{bmatrix} x_4(\lambda) \\ x_2(\lambda) \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{b}} + \lambda\bar{\boldsymbol{b}}' = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 3\lambda \\ 6 - \lambda \end{bmatrix}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	2	0	3	0	$18 - 3\lambda$
x_4	0	-3	0	-2	1	$-6 + 3\lambda$
x_2	0	1	1	1	0	$6 - \lambda$

A RHS perturbációja: példa

- Az aktuális bázis $\lambda > 6$ esetén már nem megengedett
- Át kell térnünk egy új bázisra: x_2 kilép a bázisból
- Mivel x_2 sora nem tartalmaz negatív elemet, nem tudjuk végrehajtani a duál szimplex pivotot
- Minden $\lambda > 6$ esetén a paraméteres lineáris programnak nincs megengedett megoldása (a duál nemkorlátos)

- A célfüggvény **szakaszosan lineáris** és **konkáv**