A duál szimplex algoritmus

- A duál szimplex algoritmus
- Alkalmazások

Emlékeztető: lineáris programok duálja

- Tekintsük a lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\boldsymbol{b}$ egy m-oszlopvektor, és $\boldsymbol{x}$ pedig n-oszlopvektor

- A Karush-Kuhn-Tucker feltételek szerint egy $\boldsymbol{x}$ akkor és csak akkor optimális, ha van $\boldsymbol{v}^T$ és $\boldsymbol{w}^T$, hogy

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \tag{P}$$

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{v}^T \geq \boldsymbol{0} \tag{D}$$

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = 0 \tag{CS}$$

Emlékeztető: lineáris programok duálja

- Legyen $\boldsymbol{x}$ egy megengedett bázismegoldás és $\boldsymbol{B}$ a hozzá tartozó bázis

	z	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_N}$	RHS	
z	1	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	0. sor
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1..m sorok

- Válasszuk meg a duál változókat az alábbiak szerint

$$\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}, \qquad \boldsymbol{v}^T = [\underbrace{\boldsymbol{0}}_{\text{bázis}} \quad \underbrace{\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T}_{\text{nembázis}}]$$

- Ekkor (P) teljesül mert $\boldsymbol{B}$ megengedett
- (CS) azonosságként teljesül, mert

$$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\boldsymbol{x_B} + (\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T)\boldsymbol{0} \equiv 0$$

Emlékeztető: lineáris programok duálja

- (D) egyik állítása, pontosabban $\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{0}$ azonosságként teljesül
- Ugyanis felbontva bázis- és nembázis-összetevőkre

$$\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}^T = (\boldsymbol{c_B}^T, \boldsymbol{c_N}^T) - \\ \boldsymbol{w}^T(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T)$$

- Összetevőnként elvégezve

$$\boldsymbol{c_B}^T - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{c_B}^T - \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{0} \qquad \text{(bázis)}$$

$$\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{N} + (\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T) = \\ -\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} + \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{0} \qquad \text{(nembázis)}$$

- (D) másik állítása ($\boldsymbol{v}^T \geq \boldsymbol{0}$) akkor teljesül, ha $\boldsymbol{B}$ optimális

A duál szimplex algoritmus

- Tehát a (primál) szimplex algoritmus olyan bázist állít elő, mely egyszerre teljesíti a (P), (D) és (CS) feltételeket
- Minden iterációs lépésben teljesíti a (P) feltételeket, a complementary slackness (CS) feltételeket, és a (D) feltételeket részben
- Amint a (D) feltételek is maradéktalanul teljesülnek, a megoldás optimális
- A **duál szimplex** algoritmus a primál algoritmus „duálja”: „duál megengedett” bázisok sorozatán keresztül jut el egy primál megengedett bázisba
    - minden lépésben teljesíti (D)-t, (CS)-t, és részben (P)-t
    - az optimumban teljesíti (P)-t is maradéktalanul
- Hasznos, ha olyan a probléma, hogy könnyű primál optimális bázist találni

A duál szimplex algoritmus

- Tekintsük a primál lineáris programot standard alakban

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\boldsymbol{b}$ egy m-oszlopvektor, és $\boldsymbol{x}$ pedig n-oszlopvektor
- Legyen $\boldsymbol{B}$ egy bázis, amely teljesíti
  - a primál optimalitási feltételeket (**duál megengedett**)

$$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T \geq \boldsymbol{0}$$

  - de nem primál megengedett (nem **duál optimális**)

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \not\geq \boldsymbol{0}$$

A duál szimplex algoritmus

- A B bázishoz tartozó szimplex tábla
  - (duál) megengedett, ha $\forall j \in N : z_j \geq 0$
  - (duál) optimális, ha $\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \bar{b}_i \geq 0$
- A célunk, hogy az aktuális szimplex táblát duál optimálissá tegyük duál megengedett bázisok sorozatán keresztül
- Ez a szimplex táblán azt jelenti, hogy
  - a nulladik sorban mindig nemnegatív együtthatók (duál megengedett)
  - de a RHS oszlopában lehetnek negatív értékek
- Cél, hogy az RHS oszlop is csupa nemnegatív értéket tartalmazzon
- Ehhez pivotok sorozatán keresztül vezet az út

A duál szimplex algoritmus

- Legyen a kilépő változó a legnegatívabb bázisváltozó

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \bar{b}_i$$

- **Lemma:** a pivot után kapott bázismegoldás is primál optimális (nemnegatív elemek állnak a nulladik sorban), ha a k belépő változót az alábbi feltétel szerint választjuk:

$$k = \operatorname*{argmin}_{j \in N} \left\{ -\frac{z_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

- **Lemma:** ha $\forall j \in N : y_{rj} \geq 0$, akkor a duál nemkorlátos és a primálban nincs megoldás
- Nem bizonyítjuk
- Pivot az r-edik soron és k-adik oszlopon

A duál szimplex algoritmus: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & \geq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Standard alakra hozva és átírva maximalizálásra

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 3 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & & & - & x_5 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

- A primál szimplex algoritmust nem használhatjuk, mert a slack-változók nem alkotnak (primál) megengedett bázist

A duál szimplex algoritmus: példa

- Használjuk a duál szimplex algoritmust (a feltételek invertálása után)

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \max & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 4x_3 & & & & & & \\ \text{s.t.} & -x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & -3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & + & x_5 & = & -4 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

- Megtehetjük, mert a slack-változók primál optimális (duál megengedett) kezdeti bázist alkotnak

$$\boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T = \mathbf{0} - [-2 \;\; -3 \;\; -4] \geq \mathbf{0}$$

- Nem duál optimális: $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} \not\geq \mathbf{0}$

A duál szimplex algoritmus: példa

- A kezdeti szimplex tábla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	2	3	4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_5	0	$\boxed{-2}$	1	-3	0	1	-4

- Kilép a legnegatívabb bázisváltozó, x_5
- A belépő változó x_1, ugyanis $-\frac{z_1}{y_{51}} = \min\{-\frac{z_j}{y_{5j}} : y_{5j} < 0\}$
- A nulladik sor j-edik eleme osztva az r-edik sor j-edik elemével, ha az negatív, és mindez invertálva
- Keressük azt a nembázis változót, amire ez minimális
- Ha így választunk kilépő és belépő változót, a pivot után is duál megengedett bázist kapunk

A duál szimplex algoritmus: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	2	3	4	0	0	0
x_4	0	-1	-2	-1	1	0	-3
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	2	3	4	0	0	0
x_4	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	4	1	0	1	-4
x_4	0	0	$\boxed{-\frac{5}{2}}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	2

A duál szimplex algoritmus

- A pivot után a jobboldalon (RHS) mindig nemnegatív értéket kapunk, mert az első lépéseben az x_r sorát elosztva $y_{rk} < 0$-val invertáljuk a sor elemeit, így $\bar{b}_r < 0$-t is
- Ha a bázis nem duál degenerált ($z_k > 0$), akkor a pivot után a célfüggvény értéke **csökken**
- A pillanatnyi bázismegoldás teljesíti az optimalitási kritériumokat de kívül van a megengedett tartományon
- Csökkentenünk kell a célfüggvényt annak érdekében, hogy megengedetté tegyük
- Valójában nem is a primál (maximalizálási) problémát oldjuk meg, hanem a duál (minimalizálási) problémát
- A duál szimplex alkalmazásához azonban nem kell átírni a problémát duál alakba, az algoritmus rögtön a primál táblán futtatható

A duál szimplex algoritmus: példa

- Az új bázis duál megengedett (primál optimális), de még nem duál optimális, mert $x_4 = -1 < 0$
- x_4 kilép a bázisból, és $x_2 = \operatorname{argmin}\{-\frac{z_j}{y_{4j}} : y_{4j} < 0\}$ belép

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{28}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{11}{5}$

- A kapott bázis duál optimális és duál megengedett
- A maximalizálási probléma optimuma $z = -\frac{28}{5}$, melyet az $\boldsymbol{x} = [\frac{11}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 0]^T$ pontban ér el

A duál szimplex algoritmus: példa

- Vegyük észre, hogy a maximalizálási probléma célfüggvénye minden lépésben romlott

$$\max -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 : 0 \to -4 \to -\frac{28}{5}$$

- Ugyanis valójában a primál maximalizálási probléma helyett a $\min\{\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{b} : \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^T\}$ duál minimalizálási problémát oldottuk meg
- $\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}$ választással a duál célfüggvényértéke $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_B}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ minden iterációban kiolvasható a szimplex táblából (nulladik sor, RHS oszlop)

$$\min \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{b} : 0 \to -4 \to -\frac{28}{5}$$

- Eredetileg a minimalizálási probléma volt, optimuma $z = \frac{28}{5}$

A duál szimplex algoritmus: példa

- Oldjuk meg az alábbi lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & \geq & 2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & -3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Standard alakban, maximalizálásként

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcr}
\max & -2x_1 & - & 3x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & = & 2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & & & + & x_6 & = & -3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Az első feltételt (-1)-gyel szorozva primál optimális egységmátrix bázist kapunk

A duál szimplex algoritmus: példa

- A slack-változók primál megengedett bázist alkotnak, ha $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$, és duál megengedett bázist, ha $\boldsymbol{c}^T \leq \mathbf{0}$
- Használható a duál szimplex algoritmus

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	2	3	5	6	0	0	0
x_5	0	-1	-2	-3	-1	1	0	-2
x_6	0	$\boxed{-2}$	1	-1	3	0	1	-3

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	4	4	9	0	1	-3
x_5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\boxed{-\frac{5}{2}}$	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

A duál szimplex algoritmus: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	0	5	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{19}{5}$
x_2	0	0	1	1	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
x_1	0	1	0	1	-1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$

- A minimum $\frac{19}{5}$, amit a minimalizálási probléma az $\boldsymbol{x} = [\frac{8}{5} \quad \frac{1}{5} \quad 0 \quad 0]^T$ pontban ér el
- Az eredeti minimalizálási probléma duálja

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 2w_1 & - & 3w_2 & & \\
\text{s.t.} & w_1 & - & 2w_2 & \leq & 2 \\
& 2w_1 & + & w_2 & \leq & 3 \\
& 3w_1 & - & w_2 & \leq & 5 \\
& w_1 & + & 3w_2 & \leq & 6 \\
& w_1 & & & \geq & 0 \\
& & & w_2, & \leq & 0
\end{array}$$

A duál szimplex algoritmus: példa

- w_2 „nem viselkedik jól”, mert $w_2 \leq 0$
- Legyen $w_2' = -w_2 \geq 0$

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2w_1 & + & 3w_2' & & \\ \text{s.t.} & w_1 & + & 2w_2' & \leq & 2 \\ & 2w_1 & - & w_2' & \leq & 3 \\ & 3w_1 & + & w_2' & \leq & 5 \\ & w_1 & - & 3w_2' & \leq & 6 \\ & w_1, & & w_2' & \geq & 0 \end{array}$$

- A duálban a slack-változók primál megengedett bázist alkotnak, mert a RHS nemnegatív és csupa „$\leq$” feltétel
- A primál szimplexszel megoldva: az optimum $\frac{19}{5}$ és

$$w_1 = \frac{8}{5}, \qquad w_2 = -w_2' = -\frac{1}{5}$$

Optimális létszám probléma

- Egy vasútállomáson a munka eloszlása olyan, hogy a létszámszükséglet
  - 0 és 4 óra között 3 fő
  - 4 és 8 óra között 8 fő
  - 8 és 12 óra között 10 fő
  - 12 és 16 óra között 8 fő
  - 16 és 20 óra között 14 fő
  - 20 és 24 óra között 5 fő
- A műszakok minden nap 0, 4, 8, 12, 16 és 20 órakor kezdődnek, és 8 órát tartanak
- **Feladat:** készítsük el az optimális létszámbeosztást, mely a legkevesebb munkást veszi igénybe

Optimális létszám probléma

- Az egyes műszakokban munkába lépő dolgozók számát jelölje rendre x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, és x_6
- Ekkor az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ függvényt kell minimalizálni
- 0 és 4 óra közt a 20 órai és a 0 órai műszakok vannak munkában, legalább 3 fő

$$x_1 + x_6 \geq 3$$

- 4 és 8 óra közt legalább 8 fő

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

- Hasonlóan a többi műszakra
- Természetesen minden változó nemnegatív

Optimális létszám probléma

- A lineáris program

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
\min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq & 8 \\
& & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 10 \\
& & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq & 8 \\
& & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & \geq & 14 \\
& & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \geq & 5 \\
& x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & \geq & 3 \\
& x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

- A változók folytonosak, pedig törtszámú munkást nem tudunk alkalmazni
- Egész értékű lineáris program, ahol megköveteljük a megoldások egész értékűségét: NP-nehéz probléma
- Reméljük, hogy az optimális megoldás egész értékű lesz

Optimális létszám probléma

- Az $x_i + x_j \geq b$ feltételeket s_1, s_2, stb. slack-változók bevezetésével $x_i + x_j - s = b, z \geq 0$ alakra hozzuk
- Maximalizálási alakban (figyelem: a nulladik sort -1-gyel szorozni kell), és z oszlopát most elhagyva

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
s_1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	8
s_2	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_3	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	8
s_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	14
s_5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	5
s_6	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	3

Optimális létszám probléma

- A slack-változók triviális egységbázist alkotnak
- Érdemes -1-gyel végigszorozni az összes sort
- Primál optimális de nem primál megengedett: duál szimplex
- s_4 kilép a bázisból és x_4 belép

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
s_1	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-8
s_2	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-10
s_3	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	-8
s_4	0	0	0	$\boxed{-1}$	-1	0	0	0	0	1	0	0	-14
s_5	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	-5
s_6	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-3

Optimális létszám probléma

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	–14
s_1	–1	–1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	–8
s_2	0	$\boxed{-1}$	–1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	–10
s_3	0	0	–1	0	1	0	0	0	1	–1	0	0	6
x_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	–1	0	0	14
s_5	0	0	0	0	–1	–1	0	0	0	0	1	0	–5
s_6	–1	0	0	0	0	–1	0	0	0	0	0	1	–3

- s_2 kilép a bázisból, x_2 belép

Optimális létszám probléma

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	–24
s_1	–1	0	1	0	0	0	1	–1	0	0	0	0	2
x_2	0	1	1	0	0	0	0	–1	0	0	0	0	10
s_3	0	0	–1	0	1	0	0	0	1	–1	0	0	6
x_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	–1	0	0	14
s_5	0	0	0	0	$\boxed{-1}$	–1	0	0	0	0	1	0	–5
s_6	–1	0	0	0	0	–1	0	0	0	0	0	1	–3

- s_5 kilép a bázisból, x_5 belép
- Duál degenerált pivot

Optimális létszám probléma

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	-24
s_1	-1	0	1	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	2
x_2	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_3	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	1	0	1
x_4	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	-1	1	0	9
x_5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	5
s_6	$\boxed{-1}$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-3

- s_6 kilép a bázisból, x_1 belép

Optimális létszám probléma

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	RHS
z	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-27
s_1	0	0	1	0	0	1	1	-1	0	0	0	-1	5
x_2	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	10
s_3	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	-1	1	0	1
x_4	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	-1	1	0	9
x_5	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	-1	0	5
x_1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	3

- Optimális tábla: primál optimális és most már primál megengedett is
- 27 főt kell alkalmazni: a 0 órai műszakban 3, a 4 órásban 10, a 12 órásban 9, a 16 órásban 5 fő kezd, a többi műszakban nem kell senkinek kezdeni
- 4-től 8-ig $s_1 = 5$, 12-től 16 óráig $s_3 = 1$ fő létszámfelesleg!

Áruellátási probléma

- Egy áruház valamely termékre vonatkozó négy hónapi adatai a következők

	I. hó	II. hó	III. hó	IV. hó
Forgalmi terv [t]	5	6	8	6
Beszerzési költség [mFt/t]	4	3	2	5
Raktározási kapacitás [t]	10	10	10	10
Raktározási költség [mFt/t]	1.5	1.5	1.5	1.5

- A periódus kezdetén és végén a raktárkészlet 0, a raktárkészlet az egyes hónapokban egyenletesen változik, és a raktározási költség a hónap közepén raktározott mennyiség alapján kerül meghatározásra
- **Feladat:** a forgalmi terv teljesítése minden hónapban, a raktározási kapacitások figyelembe vétele mellett a lehető legkisebb beszerzési és raktározási költséggel

Áruellátási probléma

- Legyen az egyes hónapokban a beszerzett áru mennyisége rendre x_1, x_2, x_3, és x_4 [t]
- Az egyes hónapok végén a raktározott mennyiség legyen rendre r_1, r_2, és r_3 [t] (az utolsó hónapban nulla)
- Az első hónapban beszerzett áruból teljesítendő a forgalmi terv, a maradék megy raktárra

$$x_1 = 5 + r_1$$

- A többi hónapban a hó eleji raktárkészlet és az aktuális beszerzés fedezi a havi forgalmi tervet és a hó végi raktárkészletet

$$r_1 + x_2 = 6 + r_2$$
$$r_2 + x_3 = 8 + r_3$$
$$r_3 + x_4 = 6$$

Áruellátási probléma

- Mivel a raktárkészlet egyenletesen változik, az egyes hónapokban a raktárkészlet középértéke rendre

$$\frac{r_1}{2}, \quad \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad \frac{r_3}{2}$$

- Ebből a raktározási költség az egész periódusra nézve

$$1.5\left(\frac{r_1}{2} + \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_2 + r_3}{2} + \frac{r_3}{2}\right) = 1.5r_1 + 1.5r_2 + 1.5r_3$$

- A beszerzési költség: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4$
- Végül a raktárkészlet nem haladhatja meg a kapacitásokat

$$r_1, r_2, r_3 \leq 10$$

- Természetesen az összes változó nemnegatív

Áruellátási probléma

- A lineáris program

$$\begin{array}{lccccccccc}
\min & 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +5x_4 & +1.5r_1 & +1.5r_2 & +1.5r_3 & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & & -r_1 & & & = 5 \\
& & x_2 & & & +r_1 & -r_2 & & = 6 \\
& & & x_3 & & & +r_2 & -r_3 & = 8 \\
& & & & x_4 & & & +r_3 & = 6 \\
& & & & & r_1 & & & \leq 10 \\
& & & & & & r_2 & & \leq 10 \\
& & & & & & & r_3 & \leq 10 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & r_1, & r_2, & r_3 & \geq 0
\end{array}$$

- A célfüggvény maximalizálási formában

$$\max \quad -4x_1 \quad -3x_2 \quad -2x_3 \quad -5x_4 \quad -1.5r_1 \quad -1.5r_2 \quad -1.5r_3$$

- A szimplex táblába írva -1-gyel szorozni kell!

Áruellátási probléma

- Kezdeti bázist kell találni
  - a kapacitáskorlátokhoz a slack-változók (s_1, s_2, s_3)
  - x_1, x_2, x_3 és x_4 is jó, de a célfüggvényben a hozzájuk tartozó együtthatókat ki kell nullázni

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	4	3	2	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	0
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
x_2	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	6
x_3	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	8
x_4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6
s_1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	10
s_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	10
s_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	10

Áruellátási probléma

- Vonjuk ki x_1 sorának négyszeresét a nulladik sorból, így az x_1-hez tartozó elem a kinullázható

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	3	2	5	$\frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	-20
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
x_2	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	6
x_3	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	8
x_4	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6
s_1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	10
s_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	10
s_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	10

Áruellátási probléma

- Hasonlóan x_2, x_3 és x_4 sorára

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	0	-84
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
x_2	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	6
x_3	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	8
x_4	0	0	0	0	1	0	0	$\boxed{1}$	0	0	0	6
s_1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	10
s_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	10
s_3	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	10

- Primál megengedett tábla, a primál szimplex segítségével optimalizálható
- Figyelni kell a célfüggvény értékére is (most -84)

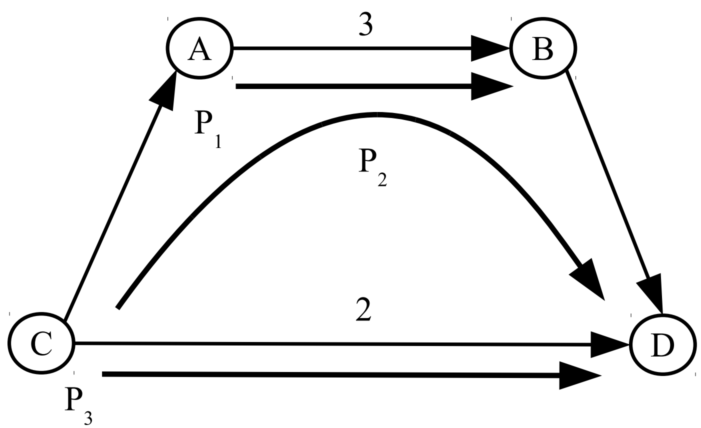
Áruellátási probléma

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	r_1	r_2	r_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	-75
x_1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	5
x_2	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	6
x_3	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	14
r_3	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6
s_1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	10
s_2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	10
s_3	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	4

- Az egyes hónapokban beszerzendő áru mennyisége rendre 5, 6 és 14 tonna, az utolsó hónapban nincs beszerzés
- Raktárra csak a III. hónap végén kerül áru, 6 tonna
- A teljes költség 75 millió Ft

Hálózati útvonalválasztás

- Egy távközlési hálózatban egy megrendelő A-B illetve C-D pontok közt akar két-két egységnyi forgalmat átvinni
- A hálózatüzemeltető A-B pontok közt P_1, C-D pontok közt pedig P_2 és P_3 útvonalon szolgáltat
- A-B link kapacitása 3, C-D link kapacitása 2 egység
- Az árazás progresszív: a linken az első 1 egység forgalom ára 1, a további forgalomé 3 eFt/egység



- **Feladat:** keressük a minimális költségű forgalomelvezetést

Hálózati útvonalválasztás

- Jelölje a P_1, P_2, P_3 utakon átvitt folyamot rendre f_1, f_2, f_3
- Két-két egység forgalmat kell elvezetni

$$f_1 \geq 2, \qquad f_2 + f_3 \geq 2$$

- Az egyes linkeken a terhelés legyen l_1 és l_2, ezekre érvényesek a kapacitáskorlátok

$$l_1 = f_1 + f_2 \leq 3, \qquad l_2 = f_3 \leq 2$$

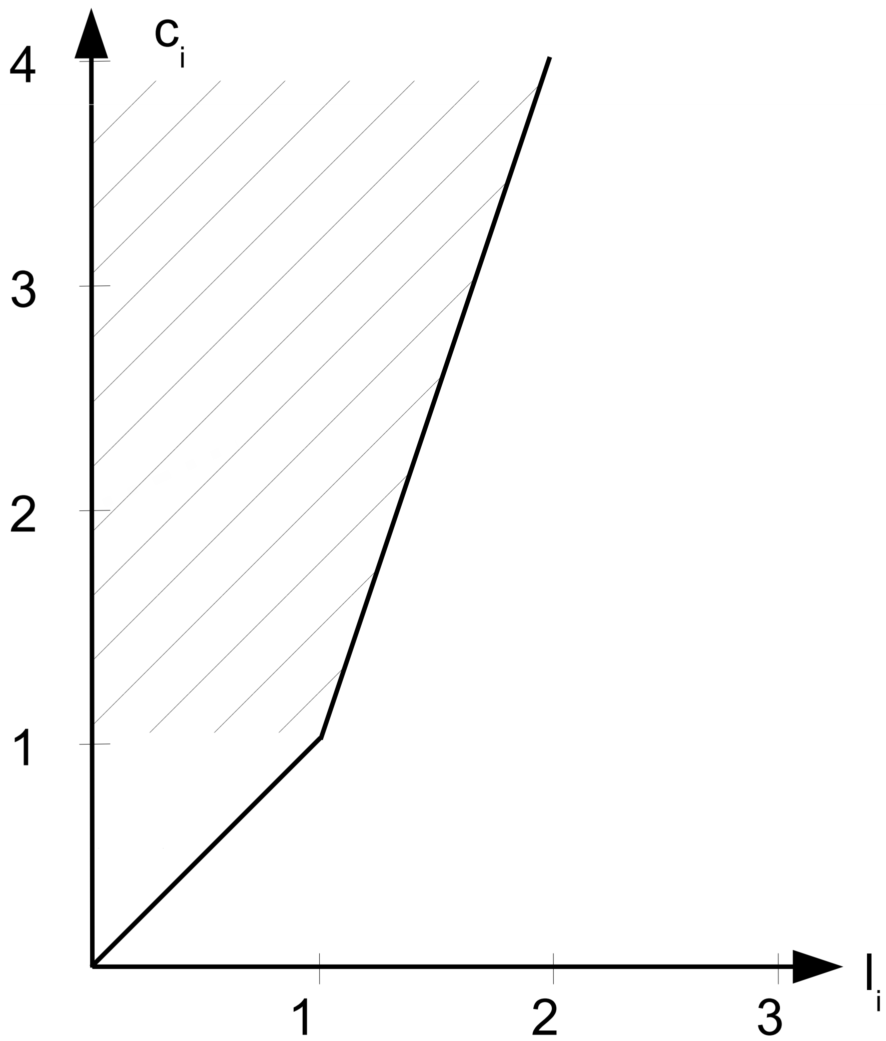
- Az egyes linkeken átvitt forgalom ára legyen c_1 és c_2

$$c_i = \begin{cases} l_i & \text{ha } l_i \leq 1 \\ 1 + 3(l_i - 1) & \text{ha } l_i > 1 \end{cases} \qquad i \in \{1, 2\}$$

- A cél $c_1 + c_2$ minimalizálása: nemlineáris célfüggvény!

Hálózati útvonalválasztás

- Trükk: a költségfüggvényt linearizáljuk



- Szakaszosan lineáris költségfüggvény
- Szakaszonként közelítjük

$$\min c_i$$

$$c_i \geq l_i$$

$$c_i \geq 3l_i - 2$$

- A minimalizálás miatt a lehető legkisebb költséget kapjuk

Hálózati útvonalválasztás

- A lineáris program

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1 + c_2 & \\
\text{s.t.} \quad & f_1 + f_2 & \leq 3 \\
& f_3 & \leq 2 \\
& f_1 + f_2 - c_1 & \leq 0 \\
& 3f_1 + 3f_2 - c_1 & \leq 2 \\
& f_3 - c_2 & \leq 0 \\
& 3f_3 - c_2 & \leq 2 \\
& f_1 & \geq 2 \\
& f_2 + f_3 & \geq 2 \\
& f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, & \geq 0
\end{aligned}
$$

Hálózati útvonalválasztás

- Standard alak: a slack-változók bázist alkotnak
- Maximalizálásra áttérve és az utolsó 2 feltételt invertálva duál megengedett egységbázist kapunk
- Duál szimplex

	z	f_1	f_2	f_3	c_1	c_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	RHS
z	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
s_2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
s_3	0	1	1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
s_4	0	3	3	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
s_5	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
s_6	0	0	0	3	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	2
s_7	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-2
s_8	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

Hálózati útvonalválasztás

- Az optimális tábla

	z	f_1	f_2	f_3	c_1	c_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	RHS
z	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	3	3	-8
s_1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	0
s_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1
s_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	-1	-2	-2	4
c_1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-3	-3	7
c_2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
f_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1	1
f_1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	2
f_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1

- A P_1 útvonalon 2 egység, a P_2 és P_3 utakon egy-egy egységnyi forgalmat kell elvezetni
- A teljes költség 8 eFt