

Farkas lemmája és a dualitás

- Lineáris programozás optimális megoldása: a Karush-Kuhn-Tucker (KKT) feltételek
- Lineáris programok duáljai, a dualitás gyenge és erős tétele
- Farkas lemmája

Dualitás: példa

- Tekintsük az alábbi lineáris programot

$$\begin{array}{llllll} z = \max & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\ \text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 \leq 12 \\ & -x_1 & & & - & x_3 \leq -3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 \geq 0 \end{array}$$

- Felső korlátot keresünk a célfüggvényre
- Mivel a változók nemnegatívak, az első feltétel felső korlát

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12$$

- Ugyanis tagonként $x_1 \leq 3x_1$, $2x_2 \leq 2x_2$, és $-x_3 \leq x_3$
- Található élesebb felső korlát?

Dualitás: példa

- Ha a két kényszerfeltételt összeadjuk

$$\begin{array}{rclclcl}
 z = & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \\
 \hline
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq 12 \\
 \oplus & -x_1 & & & - & x_3 & \leq -3 \\
 \hline
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & \leq 9
 \end{array}$$

- Jobb kényszerfeltételt kapunk, ugyanis

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

- Még élesebb korlátot kapunk, ha a második feltétel kétszeresét adjuk az elsőhöz:

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \leq (3 - 2 \cdot 1)x_1 + (2 - 2 \cdot 0)x_2 + (1 - 2 \cdot 1)x_3 \leq 6$$

- Ez a legélesebb korlát, ugyanis az optimum: $z = 6$

Dualitás: példa

- Minden $w_1 \geq 0$ és $w_2 \geq 0$ együtthatóra felső korlát, amelyre

$$z = x_1 + 2x_2 - x_3 \leq w_1 (3x_1 + 2x_2 + x_3) + w_2 (-x_1 - x_3)$$

- $w_1 \geq 0$ és $w_2 \geq 0$, különben az előjel megfordul
- Az a legélesebb korlát, amelyre $12w_1 + (-3)w_2$ minimális
- Egy másik lineáris program: **duál lineáris program**

$$\begin{array}{llllll} \min & 12w_1 & - & 3w_2 & & \\ \text{s.t.} & 3w_1 & - & w_2 & \geq & 1 \\ & 2w_1 & & & \geq & 2 \\ & w_1 & - & w_2 & \geq & -1 \\ & w_1, & & w_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- A duálnak is 6 az optimális célfüggvényértéke

A Karush-Kuhn-Tucker (KKT) feltételek

- **Tétel:** tekintsük az alábbi, **standard formában** adott lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{A}$ egy $m \times n$ mátrix és $\mathbf{x}$ pedig n -oszlopvektor.
Egy $\mathbf{x}$ akkor és csak akkor optimális megoldása a fenti lineáris programnak, ha létezik egy $\mathbf{v}^T$ sor n -vektor és egy $\mathbf{w}^T$ sor m -vektor, hogy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{P})$$

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^T \geq \mathbf{0} \quad (\text{D})$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0 \quad (\text{CS})$$

A Karush-Kuhn-Tucker (KKT) feltételek

- v^T és w^T vektorok neve **duál változó** (Lagrange-i szorzó)
- A $w^T = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m]$ duál változók a primál probléma $Ax = b$ feltételeihez tartoznak. Minden $a^i x = b_i$ feltételhez van egy w_i duál változó, pontosan m darab
- A $v^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ duál változók az x primál változóra adott nemnegativitási feltételekkel vannak összefüggésben. Minden $x_j \geq 0$ feltételhez tartozik egy v_j duál változó, pontosan n darab
- A (CS) feltételt felbontva: $\sum_{j=1}^n v_j x_j = 0$. Mivel $v_j \geq 0$ és $x_j \geq 0$, ezért $\forall j \in \{1, \dots, n\} : v_j x_j = 0$. Ha tehát $v_j > 0$, akkor a j -edik primál változó értéke 0 és viszont

$$v_j > 0 \Rightarrow x_j = 0$$

$$x_j > 0 \Rightarrow v_j = 0$$

A KKT feltételek: bizonyítás

- **Biz.:** először belátjuk, hogy ha létezik x , v^T és w^T vektor, hogy

$$Ax = b, \quad x \geq 0 \quad (\text{P})$$

$$c^T - w^T A + v^T = 0, \quad v^T \geq 0 \quad (\text{D})$$

$$v^T x = 0 \quad (\text{CS})$$

akkor az x vektor a $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ lineáris program optimális megoldása

- x a (P) miatt nyilvánvalóan megengedett megoldás
- Ha x az egyetlen megengedett megoldás, készen vagyunk
- Ellenkező esetben legyen x' egy tetszőleges másik megengedett megoldás

A KKT feltételek: bizonyítás

- Szorozzuk be (D)-t jobbról $x - x'$ -vel

$$0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T)(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ (\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}') - \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v}^T \mathbf{x} + \mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{x}' - \mathbf{v}^T \mathbf{x}'$$

- (CS) miatt $\mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0$, és $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ miatt $\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{w}^T \mathbf{b}$

$$0 = (\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}') - \mathbf{w}^T (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}') - \mathbf{v}^T \mathbf{x}'$$

- $\mathbf{x}'$ megengedett megoldás, ezért $\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}' = 0$
- Mivel $\mathbf{v}^T \geq 0$ és $\mathbf{x}' \geq 0$, ezért $\mathbf{v}^T \mathbf{x}' \geq 0$, és így

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{c}^T \mathbf{x}' \geq 0$$

- Így $\mathbf{x}'$ megengedett megoldásokra $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}'$: $\mathbf{x}$ optimális

A KKT feltételek: bizonyítás

- Visszafelé, ha x a $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ lineáris program optimális megoldása, akkor létezik v^T és w^T vektor, mely kielégíti a fenti (P), (D) és (CS) feltételeket
- Ha van optimális megoldás, akkor van optimális bázismegoldás
- Először tegyük fel, hogy x egy ilyen, optimális bázismegoldás és B a hozzá tartozó bázis

	z	x_B	x_N	RHS	
z	1	0	$c_B^T B^{-1} N - c_N^T$	$c_B^T B^{-1} b$	0. sor
x_B	0	I_m	$B^{-1} N$	$B^{-1} b$	1..m sorok

- Mivel B bázis optimális, ezért $c_B^T B^{-1} N - c_N^T \geq 0$
- Állítsuk elő az optimális táblából a KKT feltételeket

A KKT feltételek: bizonyítás

- Válasszuk a duális változókat az alábbiak szerint:

$$w^T = c_B^T B^{-1}$$

és legyen v^T az optimális szimplex tábla nulladik sora

$$v^T = \left[\underbrace{0}_{\text{bázis}} \quad \underbrace{c_B^T B^{-1} N - c_N^T}_{\text{nembázis}} \right] \geq 0$$

- (P) teljesül a tétel feltevése miatt
- (D) teljesül: $v^T \geq 0$, továbbá $c^T - w^T A + v^T = 0$ mert

$$c_B^T - w^T B + 0 = c_B^T - c_B^T B^{-1} B = 0 \quad (\text{bázis})$$

$$\begin{aligned} c_N^T - w^T N + (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) = \\ -c_B^T B^{-1} N + c_B^T B^{-1} N = 0 \quad (\text{nembázis}) \end{aligned}$$

A KKT feltételek: bizonyítás

- (CS) is teljesül, vagyis $v^T x = 0$, mert

$$\begin{bmatrix} 0 & (c_B^T B^{-1} N - c_N^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

- Vagyis ha x optimális bázismegoldás, akkor van a feltételnek megfelelő v^T és w^T
- Most tegyük fel, hogy x optimális, de nem bázismegoldás
- Legyen $\bar{x}$ egy optimális bázismegoldás és B a hozzá tartozó bázis
- Ekkor x felírható a (B bázishoz tartozó) nembázis változók terében, vagyis van x_N , hogy

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -B^{-1} N \\ I_{n-m} \end{bmatrix} x_N$$

A KKT feltételek: bizonyítás

- Válasszuk meg v^T és w^T duális változókat, mint az imént
- (P) teljesül, mert x megengedett megoldás
- (D) teljesül, mert csak a duális változókat tartalmazza, ezekre pedig már az előbb beláttuk a feltétel teljesülését
- (CS), vagyis $v^T x = 0$, teljesüléséhez elég belátnunk, hogy

$$(c_B^T B^{-1} N - c_N^T) x_N = 0$$

- Ez éppen a célfüggvény értékében beálló változás amint $\bar{x}$ -ből x -be haladunk
- Ez viszont nulla, mert x és $\bar{x}$ is optimális megoldás □
- A szimplex algoritmus iteratív algoritmus egy pont előállítására, mely teljesíti a KKT feltételeket: (P) és (CS) minden iterációban igaz és az a cél, hogy (D) is teljesüljön

A KKT feltételek: példa

- Keressük az alábbi lineáris program optimumát

$$\max \quad x_1 + 3x_2 \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

- x_3 és x_4 slack-változók alkalmazásával standard alak
- Választhatóak-e x primál, és $\mathbf{v}^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4]$,
 $\mathbf{w}^T = [w_1 \ w_2]$ duál változók úgy, hogy a KKT feltételek teljesüljenek

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (\text{P})$$

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^T \geq \mathbf{0} \quad (\text{D})$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{x} = 0 \quad (\text{CS})_{\text{p. 13}}$$

A KKT feltételek: példa

- Tekintsük a $\mathbf{x} = [0 \ 0 \ 4 \ 4]^T$ pontot
 - (CS) szerint $x_j > 0 \Rightarrow v_j = 0$, így $v_3 = v_4 = 0$
 - a slack-változókra felírva (D)-t: $\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T = \mathbf{0}$

$$0 - w_1 + 0 = 0$$

$$0 - w_2 + 0 = 0$$

- ebből $w_1 = w_2 = 0$ adódik
- az x_1 és x_2 változókra a (D) feltételt felírva és felhasználva, hogy $\mathbf{v}^T \geq \mathbf{0}$

$$1 + w_1 - w_2 \leq 0$$

$$3 - 2w_1 - w_2 \leq 0$$

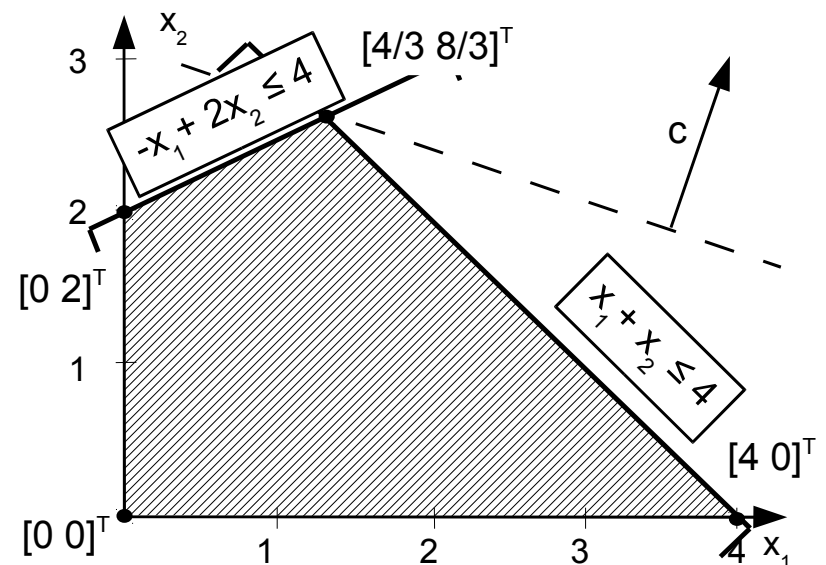
- ellentmondás mert $w_1 = w_2 = 0$: $\mathbf{x}$ nem optimális

A KKT feltételek: példa

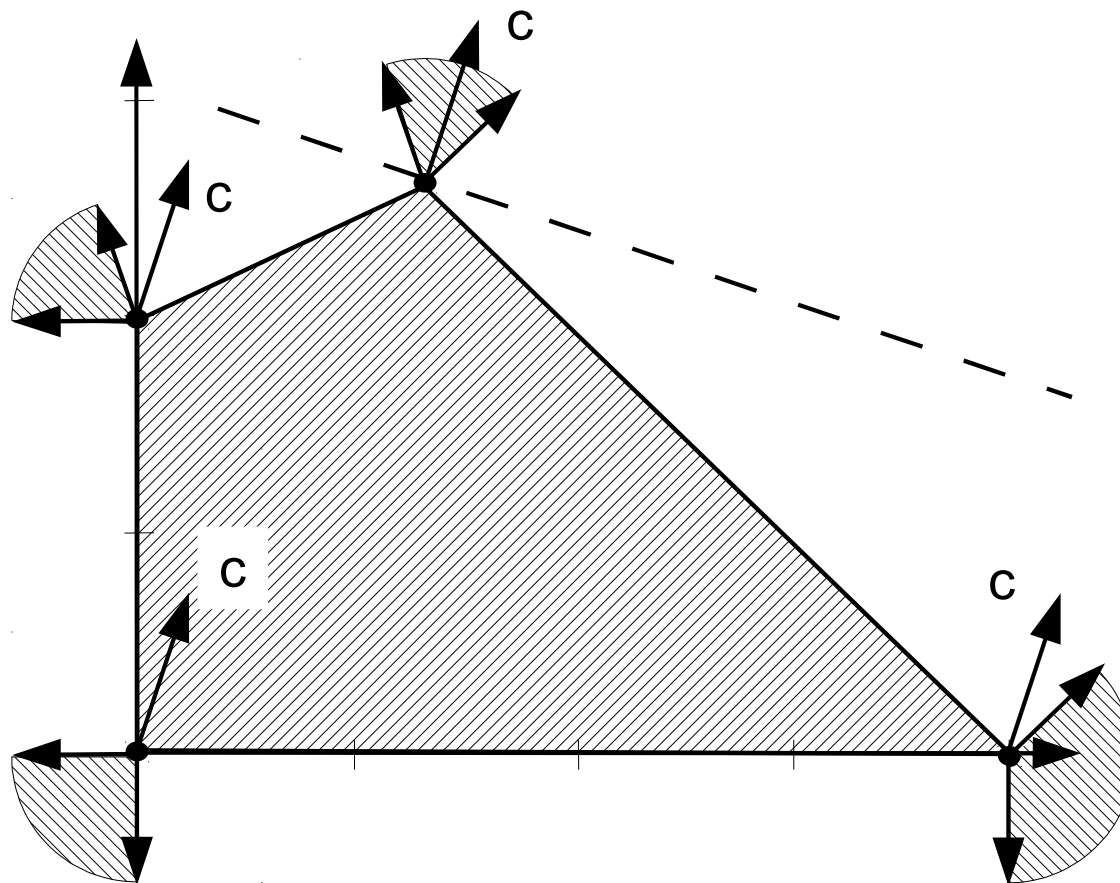
- Most válasszuk a $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}^T$ pontot
 - $x_1 = \frac{4}{3} > 0 \Rightarrow v_1 = 0$, és $x_2 = \frac{8}{3} > 0 \Rightarrow v_2 = 0$
 - (D) feltétel első két, x_1 és x_2 -höz tartozó sorát felírva

$$\mathbf{w}^T \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- ebből $\mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$
- (D) másik két egyenletéből:
 $v_3 = w_1 = \frac{2}{3}$, $v_4 = w_2 = \frac{5}{3}$
- teljesülnek a KKT feltételek, ez a pont optimális



A KKT feltételek geometriája



- Geometriailag: az $x = [\frac{4}{3} \quad \frac{8}{3}]^T$ pont az egyetlen, ahol az éles feltételek gradienseinek nemnegatív kombinációjából előállítható c^T

Lineáris programok duálisa

- Az optimális szimplex táblából kiolvasható v^T és w^T duál változók értéke (v^T egyből, w^T kicsit nehezebb)
- Tehát amikor megoldjuk a lineáris programot, hogy megkapjuk az optimális x -t, egyúttal megkapjuk a hozzá tartozó duál változók értékét is
- Nem lehetne fordítva?
- Próbáljuk direkt megkapni a v^T és w^T duális változók KKT feltételeknek megfelelő értékeit, hátha azok majd előállítják az optimális x megoldást
- Az eredeti (**primál**) lineáris program helyett oldjunk meg egy szorosan kapcsolódó **duál lineáris programot**
- Ez nem csak számítási értelemben hasznos, de sokat elárul az adott probléma és optimális megoldásának természetéről

Lineáris programok duálisa

- **Tétel:** a **standard alakban** adott maximalizálási probléma

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

duálisa egy standard alakú minimalizálási probléma

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{A} - \mathbf{v}^T = \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{v}^T \geq \mathbf{0}, \mathbf{w}^T \text{ tetszőleges} \end{aligned}$$

- Minden primál feltételhez egy duál változó, és minden primál változóhoz egy duális feltétel

Lineáris programok duálisa

- A duál feltételei megfelelnek a (D)-vel jelzett KKT feltételek

$$\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T \mathbf{A} + \mathbf{v}^T = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^T \geq \mathbf{0}$$

- Ugyanakkor a célfüggvény: $\min \mathbf{w}^T \mathbf{b}$
- A primálban és a duálban $\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}$ „helyet cserél”
- A $\mathbf{v}^T \geq \mathbf{0}$ duális változókat slack-változónak tekintve megkapjuk a duált kanonikus alakban

$$P : \max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$D : \min \mathbf{w}^T \mathbf{b}$$

$$\text{s.t. } \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$$

$$\mathbf{w}^T \text{ tetszőleges}$$

Lineáris programok duálisa: példa

- Írjuk fel a kanonikus alakú lineáris program duálisát

$$\begin{array}{llllll} P : & \max & 6x_1 & + & 8x_2 & \\ & \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & \leq 4 \\ & & 5x_1 & + & 2x_2 & \leq 7 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Slack-változókkal standard alakra hozva

$$\begin{array}{llllllllll} P : & \max & 6x_1 & + & 8x_2 & & & & & \\ & \text{s.t.} & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = 4 \\ & & 5x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = 7 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Lineáris programok duálisa: példa

- A primálban két feltétel van, ehhez két duális változót kell rendelnünk: $\mathbf{w}^T = [w_1 \quad w_2]$
- A célfüggvény $\min \mathbf{w}^T \mathbf{b} = \min \mathbf{b}^T \mathbf{w}$, ahol $\mathbf{b}^T = [4 \quad 7]$

$$\min 4w_1 + 7w_2$$

- Minden primál változóhoz egy duális feltétel
- Az x_1 változóhoz tartozó duális feltétel $\mathbf{w}^T \mathbf{a}_1 \geq c_1$, ahol $\mathbf{a}_1$ az $\mathbf{A}$ mátrix x_1 -hez tartozó (első) oszlopa és c_1 a célfüggvény x_1 -hez tartozó együtthatója

$$[w_1 \quad w_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 3w_1 + 5w_2 \geq 6$$

Lineáris programok duálisa: példa

- Hasonlóan, a duális feltétel x_2 -re: $\mathbf{w}^T \mathbf{a}_2 \geq c_2$

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = w_1 + 2w_2 \geq 8$$

- A slack-változókra egyszerre írjuk fel a duális feltételeket

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \equiv w_1 \geq 0, w_2 \geq 0$$

- A duál lineáris program

$$\begin{array}{llll} D : & \min & 4w_1 & + & 7w_2 \\ & \text{s.t.} & 3w_1 & + & 5w_2 & \geq & 6 \\ & & w_1 & + & 2w_2 & \geq & 8 \\ & & w_1, & & w_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Lineáris programok duálisa

- Ha $(\leq)$, $(\geq)$ és $(=)$ feltételek is vannak a lineáris programban

$$\begin{aligned}
 &\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 &\text{s.t. } \mathbf{A}_1 \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1 \\
 &\quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \\
 &\quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_3 \\
 &\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

- Standard formában

$$\begin{aligned}
 &\max \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 &\text{s.t. } \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{I} \mathbf{x}_s &= \mathbf{b}_1 \\
 &\quad \mathbf{A}_2 \mathbf{x} &= \mathbf{b}_2 \\
 &\quad \mathbf{A}_3 \mathbf{x} - \mathbf{I} \mathbf{x}_t &= \mathbf{b}_3 \\
 &\quad \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_s, \quad \mathbf{x}_t &\geq \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Lineáris programok duálisa

- Legyen w_1^T a $A_1x \leq b_1$ feltételekhez, w_2^T a $A_2x = b_2$ és w_3^T a $A_3x \geq b_3$ feltételekhez tartozó duál változók vektora

$$\begin{array}{llllll}
 \min & w_1^T b & + & w_2^T b_2 & + & w_3^T b_3 \\
 \text{s.t.} & w_1^T A_1 & + & w_2^T A_2 & + & w_3^T A_3 & \geq & c^T \\
 & w_1^T I & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & -w_3^T I & & \geq & 0 \\
 & w_1^T, & & w_2^T, & & w_3^T & & \text{tetszőleges}
 \end{array}$$

- Vagyis $w_1^T \geq 0$ és $w_3^T \leq 0$
- A primál probléma
 - „ $\leq$ ” feltételeiből a duálban „ ≥ 0 ” változók lettek
 - a „ $\geq$ ” feltételekből „ ≤ 0 ” változók
 - az „ $=$ ” feltételekből pedig „tetszőleges” előjelű változók lettek a duálban

Lineáris programok duálisa

	Maximalizálási probléma		Minimalizálási probléma	
Feltétel	$\geq$	$\longleftrightarrow$	≤ 0	Változó
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	≥ 0	
	$=$	$\longleftrightarrow$	tetszőleges	
Változó	≥ 0	$\longleftrightarrow$	$\geq$	Feltétel
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	$\leq$	
	tetszőleges	$\longleftrightarrow$	$=$	

Lineáris programok duálisa: példa

- Írjuk fel az alábbi lineáris program duálisát

$$\begin{array}{llllll} \max & 8x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & - & 6x_2 & \geq & 2 \\ & 5x_1 & + & 7x_2 & = & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- A duál lineáris program

$$\begin{array}{llllll} \min & 2w_1 & - & 4w_2 & & \\ \text{s.t.} & w_1 & + & 5w_2 & \leq & 8 \\ & -6w_1 & + & 7w_2 & \geq & 3 \\ & w_1 & & & \leq & 0 \\ & & & w_2 & & \text{tetsz.} \end{array}$$

Lineáris programok duálisa

	Primál	Duál
Standard alak	$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w}^T \text{ tetszőleges} \end{aligned}$
Kanonikus alak	$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w}^T \geq \mathbf{0} \end{aligned}$

A primál és a duál kapcsolata

- **Tétel:** a duális lineáris program duálja a primál
- **Biz.:** például a kanonikus forma duálisa

$$\begin{array}{lll}
 P : \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} & D : \min \mathbf{w}^T \mathbf{b} & - \max - \mathbf{b}^T \mathbf{w} \\
 \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} & \text{s.t. } \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \equiv & \text{s.t. } - \mathbf{A}^T \mathbf{w} \leq -\mathbf{c} \\
 \mathbf{x} \geq 0 & \mathbf{w}^T \geq 0 & \mathbf{w} \geq 0
 \end{array}$$

- Alkalmazva a duálisra vonatkozó szabályokat D -re

$$\begin{array}{ll}
 D^2 : & - \min - \mathbf{x}^T \mathbf{c} \\
 & \text{s.t. } - \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \geq -\mathbf{b}^T \equiv \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 & \mathbf{x}^T \geq 0 & \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\
 & & \mathbf{x} \geq 0
 \end{array}$$



A primál és a duál kapcsolata

- Tekintsük a duált kanonikus formában

$$\begin{array}{ll} P : & \max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{s.t. } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ D : & \min \mathbf{w}^T \mathbf{b} \\ & \text{s.t. } \mathbf{w}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w}^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- Legyen $\mathbf{x}_0$ megengedett a primálban és $\mathbf{w}_0^T$ megengedett a duálban
 - szorozzuk be az $\mathbf{Ax}_0 \leq \mathbf{b}$ primál feltételt balról $\mathbf{w}_0^T \geq \mathbf{0}$ -val: $\mathbf{w}_0^T \mathbf{Ax}_0 \leq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$
 - szorozzuk be a $\mathbf{w}_0^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$ duál feltételt jobbról $\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$ -val: $\mathbf{w}_0^T \mathbf{Ax}_0 \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_0$
- Ekkor

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 \leq \mathbf{w}_0^T \mathbf{Ax}_0 \leq \mathbf{w}_0^T \mathbf{b}$$

A dualitás gyenge tétele

- **Tétel:** a primál maximalizálási probléma bármely megengedett megoldásához tartozó célfüggvényértéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint a duál minimalizálási probléma bármely megengedett megoldásához tartozó célfüggvényértéke

Ha x optimális a primálban, akkor $c^T x \leq w^T b$, ahol w^T a duál *bármely* megengedett megoldása (és vice versa)

- **Következmények:**

- ha x megengedett a primálban, w^T megengedett a duálban és $c^T x = w^T b$, akkor x és w^T optimális megoldása a primálnak illetőleg a duálnak
- ha bármelyik probléma nemkorlátos, akkor a másik problémának nincs megoldása
- a primál probléma bármely megengedett megoldása alsó korlátot ad a duál optimális célfüggvény értékére

A dualitás gyenge tétele: példa

- Tekintsük a korábbi példánkat

$$\begin{aligned} P : \quad & \max \quad 6x_1 + 8x_2 \\ & \text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ & \quad \quad 5x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & \quad \quad x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D : \quad & \min \quad 4w_1 + 7w_2 \\ & \text{s.t.} \quad 3w_1 + 5w_2 \geq 6 \\ & \quad \quad w_1 + 2w_2 \geq 8 \\ & \quad \quad w_1, \quad w_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Válasszunk egy megengedett primál és duál megoldást
 - legyen $\mathbf{x}_0 = [\frac{1}{6} \quad 3]^T$ és $\mathbf{w}_0^T = [2 \quad 3]$
 - ekkor $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_0 = 25$ és $\mathbf{w}_0^T \mathbf{b} = 29$
 - ez azt jelenti, hogy a primál optimális célfüggvény értéke biztosan nagyobb vagy egyenlő mint 25, és biztosan kisebb vagy egyenlő mint 29
 - ugyanez vonatkozik a duál optimális megoldására is

A dualitás gyenge tétele

- Ha a primál nemkorlátos, akkor a duálnak nincs megengedett megoldása
- Hasonlóan, ha a duál nemkorlátos, a primálnak nincs megoldása
- A tulajdonságok visszafelé nem igazak: abból, hogy az egyik problémában nincs megoldás, nem következik, hogy a másik nemkorlátos
- Az alábbi primál-duál lineáris programok egyikének sincs megengedett megoldása

$$\begin{array}{ll} P : & \max \quad 8x_1 + 3x_2 \\ & \text{s.t.} \quad x_1 - 6x_2 \geq 2 \\ & \quad \quad 5x_1 + 7x_2 = -4 \\ & \quad \quad x_1 \leq 0 \\ & \quad \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D : & \min \quad 2w_1 - 4w_2 \\ & \text{s.t.} \quad w_1 + 5w_2 \leq 8 \\ & \quad \quad -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\ & \quad \quad w_1 \leq 0 \\ & \quad \quad w_2 \text{ tetsz.} \end{array}$$

A dualitás erős tétele

- **Tétel:** egy primál és a megfelelő duál lineáris programozási problémákra az alábbi állítások közül pontosan egy igaz
 - a primálnak van optimális megoldása ($\bar{x}$) és a duálnak is van optimális megoldása ($\bar{w}^T$), és $c^T \bar{x} = \bar{w}^T b$
 - az egyik probléma nemkorlátos és ebből adódóan a másiknak nincs megoldása
 - egyik problémának sincs megengedett megoldása

P optimális	$\Longleftrightarrow$	D optimális
P nemkorlátos	$\implies$	D-ben nincs megoldás
D nemkorlátos	$\implies$	P-ben nincs megoldás
P-ben nincs megoldás	$\implies$	D-ben nincs megoldás vagy nemk.
D-ben nincs megoldás	$\implies$	P-ben nincs megoldás vagy nemk.

Lineáris programok duálisa: példa

- A duál felhasználható a primál megoldására

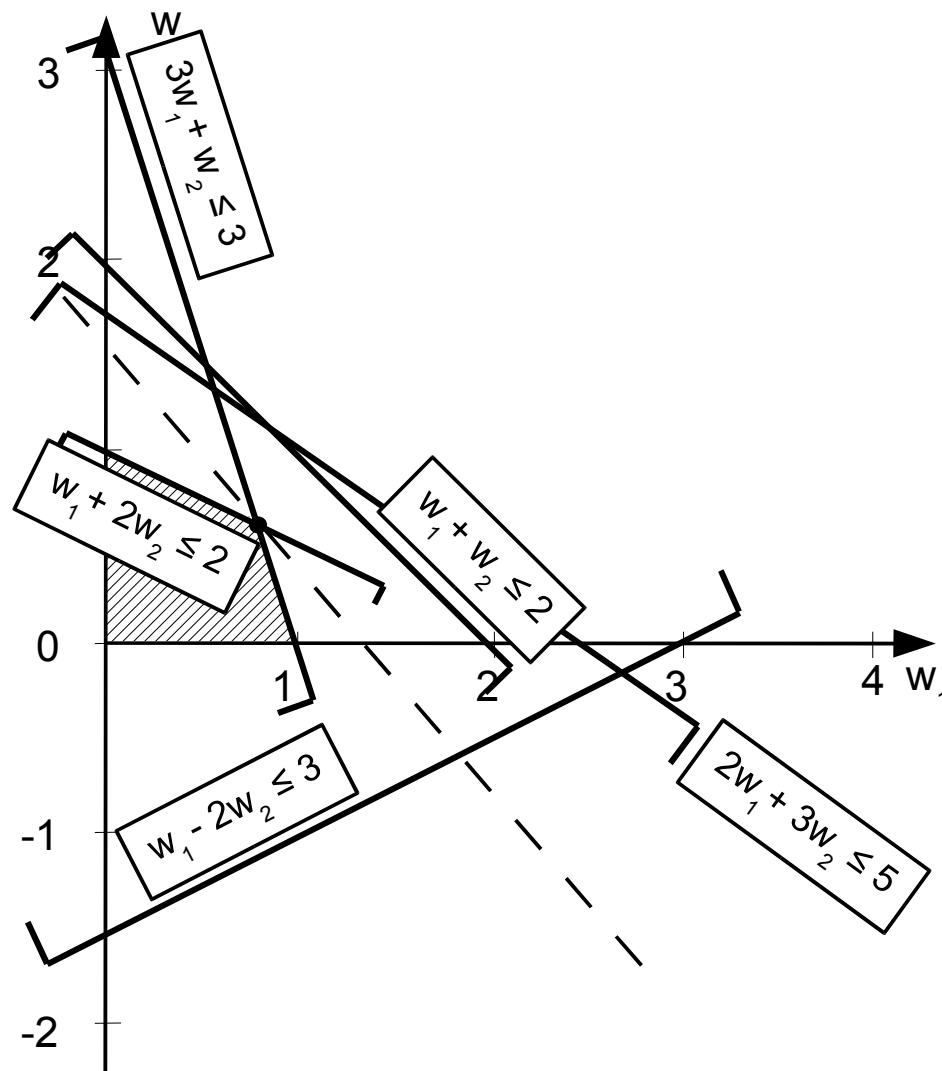
$$\begin{array}{llllllllll} \min & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & \geq & 4 \\ & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \geq & 3 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

- Csak két feltétel van: a duálnak csak két változója lesz

$$\begin{array}{llllll} \max & 4w_1 & + & 3w_2 \\ \text{s.t.} & w_1 & + & 2w_2 & \leq & 2 \\ & w_1 & - & 2w_2 & \leq & 3 \\ & 2w_1 & + & 3w_2 & \leq & 5 \\ & w_1 & + & w_2 & \leq & 2 \\ & 3w_1 & + & w_2 & \leq & 3 \\ & w_1, & & w_2, & \geq & 0 \end{array}$$

Lineáris programok duálisa: példa

- Oldjuk meg a duált grafikusan
- Az optimális megoldás:
 $\bar{w}^T = \left[\frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \right]$ és $z_0 = 5$
- Rögtön tudjuk a primál optimumát: 5
- De előállítható a primál optimális megoldás is



Lineáris programok duálisa: példa

- Oldjuk meg a lineáris programot

$$\begin{array}{llllll}
 \max & -5x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 \\
 \text{s.t.} & -x_1 & - & 2x_2 & & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & - & 2x_2 & & \leq & 3 \\
 & -5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & -5 \\
 & 5x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & -2 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

- Standard alakban

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & -5x_1 & -2x_2 & -x_3 & & & & \\
 \text{s.t.} & -x_1 & -2x_2 & & +x_4 & & & = & 1 \\
 & -2x_1 & -2x_2 & & & +x_5 & & = & 3 \\
 & -5x_1 & +x_2 & -x_3 & & & +x_6 & = & -5 \\
 & 5x_1 & +3x_2 & -x_3 & & & & +x_7 & = & -2 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \geq & 0
 \end{array}$$

Lineáris programok duálisa: példa

- Keressünk kezdeti bázist
- A triviális választás a slack-változók oszlopai, melyek mindig bázist alkotnak. Konkrétan, ha $B = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$, akkor $B = I_4$
- Ez a bázis sajnos nem (primál) megengedett, mert $\bar{b} = B^{-1}b = b \not\geq 0$
- Írjuk fel a duált, hátha a duál slack-változók megengedett bázist alkotnak

$$\begin{array}{llllllll}
 \min & w_1 & + & 3w_2 & - & 5w_3 & - & 2w_4 \\
 \text{s.t.} & -w_1 & - & 2w_2 & - & 5w_3 & + & 5w_4 & \geq & -5 \\
 & -2w_1 & - & 2w_2 & + & w_3 & + & 3w_4 & \geq & -2 \\
 & & & & - & w_3 & - & w_4 & \geq & -1 \\
 & w_1, & & w_2, & & w_3, & & w_4 & \geq & 0
 \end{array}$$

Lineáris programok duálisa: példa

- Átírva standard alakra és áttérve maximalizálásra (a végén ne felejtjük el az eredményt -1 -gyel megszorozni!)

$$\begin{array}{llllllll}
 \max & -w_1 & -3w_2 & +5w_3 & +2w_4 & & & \\
 \text{s.t.} & -w_1 & -2w_2 & -5w_3 & +5w_4 & -w_5 & & = -5 \\
 & -2w_1 & -2w_2 & +w_3 & +3w_4 & & -w_6 & = -2 \\
 & & & -w_3 & -w_4 & & & -w_7 = -1 \\
 & w_1, & w_2, & w_3 & w_4, & w_5, & w_6, & w_7 \geq 0
 \end{array}$$

- A slack-változók megengedett bázist alkotnak, mert

$$B = B^{-1} = -I_3 \text{ és } B^{-1}b = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

- A szimplex algoritmussal már megoldható

Lineáris programok duálisa: példa

- A kezdeti szimplex tábla

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	1	3	-5	-2	0	0	0	0
w_5	0	1	2	5	-5	1	0	0	5
w_6	0	2	2	-1	-3	0	1	0	2
w_7	0	0	0	1	1	0	0	1	1

- Emlékeztetőül a pivot szabályok
 - optimalitási feltétel: $z_k = \min_{j \in N} z_j \geq 0$
 - a bázisba belép k : $k = \operatorname{argmin}_{j \in N} z_j$
 - a bázisból kilép r : $r = \operatorname{argmin}_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
- Tehát w_3 belép a bázisba és kilép w_5 (vagy w_7)

Lineáris programok duálisa: példa

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	2	5	0	-7	1	0	0	5
w_3	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	-1	$\frac{1}{5}$	0	0	1
w_6	0	$\frac{11}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	-4	$\frac{1}{5}$	1	0	3
w_7	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	2	$-\frac{1}{5}$	0	1	0

- w_4 belép, w_7 kilép: degenerált pivot

	z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	RHS
z	1	$\frac{13}{10}$	$\frac{18}{5}$	0	0	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{7}{2}$	5
w_3	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	1
w_6	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	1	2	3
w_4	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{2}$	0

Lineáris programok duálisa: példa

- Az optimális duál megoldás $w^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0]$
- A célfüggvény értéke -5 , mert a kapott optimumot -1 -gyel szorozni kell (minimalizálás helyett maximalizáltunk)
- Ez lesz a primál optima is (erős tétel)
- Az optimális primál megoldásért kicsit dolgoznunk kell. Ki kell számolni a $x = c_B^T B^{-1}$ értékét

- Mivel $B = \{w_3, w_4, w_6\}$, ezért $B = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

- Ebből $B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} & -1 & -2 \end{bmatrix}$

- Ekkor $x = c_B^T B^{-1} = [\frac{3}{10} \ 0 \ \frac{7}{2}]$

Farkas lemmája

- **Tétel:** adott A mátrix ($m \times n$) és b (oszlop m -)vektor esetén az alábbi két állítás közül pontosan az egyik igaz
1.) vagy van x , hogy $Ax = b, x \geq 0$
2.) vagy van w^T , melyre $w^T A \geq 0$ és $w^T b < 0$
- **Biz.** tekintsük a primál és duál lineáris programokat

$$P : \quad \max \quad 0x$$

$$\text{s.t. } Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$D : \quad \min \quad w^T b$$

$$\text{s.t. } w^T A \geq 0$$

$$w^T \text{ tetszőleges}$$

- Ha (1) fennáll, tehát $Ax = b, x \geq 0$ megoldható, akkor a primál optimális megoldása 0
- A gyenge tétel miatt a primál optimuma (0) alsó korlát a duál **bármely** megoldásához tartozó célfüggvényre: $0 \leq w^T b$
- Ez ellentmond $w^T b < 0$ -nak, emiatt (2) nem állhat fenn

Farkas lemmája

- Ellenkező esetben, ha (1) nem igaz, vagyis $Ax = b, x \geq 0$ feltételrendszerben nincs megoldás, akkor a primálban nincs megoldás
- Az erős tétel miatt ilyenkor a duál vagy nemkorlátos, vagy nincs megoldása
- Vegyük észre, hogy a duálban mindig van megoldás, mert legalább $w^T = 0$ mindig megoldás
- Tehát a duál nemkorlátos, vagyis van megoldása és (2) igaz □
- Most a lineáris programozás dualitás tételével bizonyítottuk a Farkas lemmát
- Valójában időben a Farkas lemma megelőzte a lineáris programozás elméletét