A szimplex tábla

- Végződtetés: optimalitás és nem korlátos megoldások
- A szimplex algoritmus lépései
- A degeneráció fogalma
- Komplexitás (elméleti és gyakorlati)
- A szimplex tábla
- Példák megoldása a szimplex tábla segítségével

Emlékeztető: a szimplex algoritmus

- Tekintsük az alábbi lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy oszlop m-vektor, $\boldsymbol{x}$ pedig oszlop n-vektor
- Legyen $\boldsymbol{B}$ egy bázis, ekkor az oszlopok megfelelő átrendezése után $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]$
- Legyen továbbá $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{B}$ bázishoz tartozó bázismegoldás és tegyük fel, hogy ez a bázismegoldás megengedett ($\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$)

Emlékeztető: a szimplex algoritmus

- A lineáris program a nembázisváltozók terében

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z_0 + \textstyle\sum_{j \in N} z_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x_B} = \bar{\boldsymbol{b}} - \textstyle\sum_{j \in N} \boldsymbol{y}_j x_j \\
& \boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

  ahol
  - N a nembázisváltozók halmaza
  - $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{y}_j$ a $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ mátrix j-edik nembázisváltozóhoz tartozó oszlopa, $\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a}_j$
  - $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_B}^T \bar{\boldsymbol{b}}$
  - z_j a $\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ sorvektor j-edik nembázis-változóhoz tartozó eleme

Emlékeztető: a szimplex algoritmus

- A pivotszabályok
  - x_k beléphet a bázisba, ha $z_k > 0$
  - x_r kilép a bázisból: $r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
- A (primál) szimplex algoritmus optimalitási feltétele: az $\bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett bázismegoldás optimális megoldás, ha

$$\forall j \in N : z_j \leq 0$$

- Az alábbiakban feltesszük, hogy a megengedett bázismegoldásunk nem degenerált, vagyis $\bar{\boldsymbol{b}} > \mathbf{0}$
- A degenerált esettel később foglalkozunk

Nemkorlátos megoldás

- Adva egy $\boldsymbol{x}$ megengedett bázismegoldás, legyen x_k egy nembázisváltozó úgy, hogy $z_k > 0$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z_0 + z_k x_k \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y}_k \\ \boldsymbol{e_k} \end{bmatrix} x_k \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

- Ekkor x_k növelésével nő a célfüggvény értéke
- Tudjuk, hogy x_k-t addig növelhetjük, amíg valamelyik bázisváltozó negatívvá nem válik

$$
x_k \leq \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}
$$

Nemkorlátos megoldás

- A korlát csak akkor van értelmezve, ha van i bázisváltozó, melyre $y_{ik} > 0$
- Ha ilyen nincs, tehát $\boldsymbol{y}_k \le \boldsymbol{0}$, akkor nincs bázisváltozó, amely blokkolná x_k növelését
- **Tétel:** Egy $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}$ lineáris program megoldása **nemkorlátos**, ha van $\bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett bázismegoldás és x_k nembázisváltozó, hogy $z_k > 0$ és $\boldsymbol{y}_k \le 0$
- **Biz:.** a $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y}_k \\ \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix}$ a megengedett tartomány egy **iránya**, és a $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{d}\lambda, \lambda \ge 0$ pontok mind megengedett megoldások
- Ilyenkor minden $K > 0$-hoz létezik $\lambda > 0$, hogy

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z_0 + \lambda z_k > K \qquad \square$$

Nemkorlátos megoldás: példa

- Adott kanonikus formában a következő lineáris program

$$
\begin{array}{lrcrcl}
\max & x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
& -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
& x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Az x_3 és x_4 slack-változók bevezetésével
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Tekintsük a $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ bázist
$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nemkorlátos megoldás: példa

- A szokásos paraméterek

$$z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \bar{\boldsymbol{b}} = 9$$

$$\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} = [1 \quad 0] - [3 \quad 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [4 \quad -3]$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- A lineáris program az aktuális bázisban

$$\begin{aligned} \max \quad & 9 + 4x_1 - 3x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Nemkorlátos megoldás: példa

- A nemkorlátosságot okozó sugár

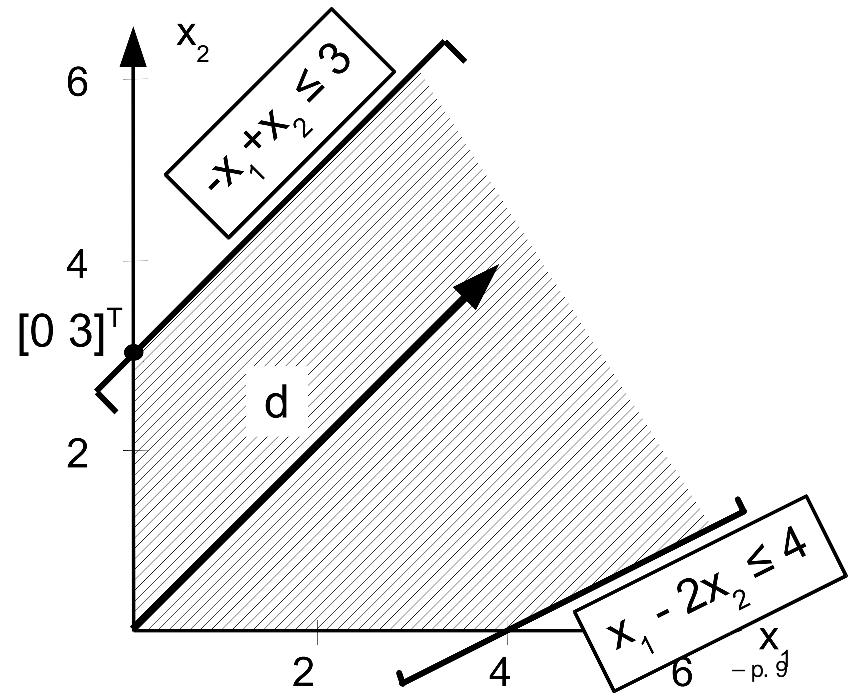
$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda, \quad \lambda \geq 0$$

- A célfüggvény értéke

$$9 + 4\lambda$$

- Az eredeti változók terében

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda : \lambda > 0$$



A szimplex algoritmus

- Tekintsük az alábbi lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy oszlop m-vektor, $\boldsymbol{x}$ pedig oszlop n-vektor
- Tegyük fel, hogy egyik bázismegoldás sem degenerált
- A szimplex algoritmus egy iteratív eljárás a fenti lineáris program megoldására, amely nem igényel mást csak lineáris egyenletrendszerek megoldását és egyszerű lineáris algebrai műveleteket
- **Inicializálás:** keressünk egy kezdeti megengedett bázismegoldást és a hozzá tartozó $\boldsymbol{B}$ bázist

A szimplex algoritmus: fő ciklus

1. Oldjuk meg a $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszert

- A megoldás egyedi: $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}}$ és legyen $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0}$

2. Oldjuk meg a $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}{}^T$ egyenletrendszert

- A megoldás egyedi: $\boldsymbol{w}^T = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}{}^T\boldsymbol{B}^{-1}$
- Számoljuk ki minden j nembázisváltozóra $z_j = c_j - \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{j}}$ értékét és legyen a belépő (nembázis)változó

$$k = \operatorname*{argmax}_{j \in N} z_j \qquad \text{(Dantzig's pivot rule)}$$

3. Ha $z_k \leq 0$, akkor vége: $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix}$ optimális megoldás és a célfüggvény értéke $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}{}^T\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$

- Ellenkező esetben tovább a következő lépésre

A szimplex algoritmus: fő ciklus

4. Oldjuk meg a $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{a_k}$ egyenletrendszert

- A megoldás egyedi: $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{a_k}$
- Ha $\boldsymbol{y}_k \leq \boldsymbol{0}$, akkor vége: a lineáris program nemkorlátos a $\left\{ \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y}_k \\ \boldsymbol{e_k} \end{bmatrix} \lambda : \lambda \geq 0 \right\}$ sugár mentén
- Ellenkező esetben tovább a következő lépésre

5. **Pivot:** x_k belép a bázisba és x_{B_r} kilép a bázisból, ahol

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} \qquad \text{(minimum ratio test)}$$

- Frissítsük a $\boldsymbol{B}$ bázist ($\boldsymbol{a_{B_r}}$-t felváltja $\boldsymbol{a_k}$), N-t, $\boldsymbol{c_B}^T$-t és $\boldsymbol{c_N}^T$-t és vissza az első lépésre

A szimplex algoritmus: komplexitás

- **Tétel:** Ha egyik lépésben sem talál degenerált bázismegoldást, akkor a szimplex algoritmus véges számú lépésben megtalálja az optimális megoldást vagy megmutatja, hogy a lineáris program nemkorlátos
- **Biz.:** minden iterációban három eset egyike következhet be
  - ha $z_k \leq 0$, akkor kiszállunk az optimális megoldással
  - ha $z_k > 0$ de $\boldsymbol{y}_k \leq \mathbf{0}$, akkor megállapítjuk, hogy a lineáris program nemkorlátos és kiszállunk
  - ha $z_k > 0$ és $\boldsymbol{y}_k \nleq \mathbf{0}$, akkor a bázisból kilép egy r változó úgy, hogy $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$ és a célfüggvény értéke $z_k \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$ határozottan nő
- Tehát minden iterációs lépésben vagy kiszállunk, vagy egy új, az előzőtől eltérő megengedett bázismegoldást adunk
- A bázismegoldások száma véges

Degeneráció

- Ha x_k belép a bázisba, x_{B_r} kilép onnan és $\boldsymbol{y}_k \not\leq \boldsymbol{0}$

Pivot előtt	Pivot után
z_0	$z_0 + z_k \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_B} - \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \boldsymbol{y}_k$
$x_k = 0$	$x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

- A bázismegoldás degenerált, ha $\boldsymbol{x_B} = \bar{\boldsymbol{b}} \not> \boldsymbol{0}$
- Ekkor van $x_{B_r} = \bar{b}_r = 0$, és ha ráadásul $y_{rk} > 0$, akkor x_{B_r} blokkolja x_k növelését: $\min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \frac{0}{y_{rk}}$
- A pivot után $x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 0$ és a célfüggvény értéke marad z_0
- A pivot során ugyanabban az extrém pontban maradtunk

Degeneráció

- **Cycling:** egyik degenerált bázismegoldásról a másikra ugorva körbejárunk ugyanazon az extrém ponton
- Ilyenkor a véges futás nem garantált
- A gyakorlatban nagyon ritkán fordul elő
- Pivotszabály: mivel a bázisba belépő változó kiválasztása tetszőleges ha $z_j > 0$, különböző szabályok adhatók
  - Dantzig's pivot rule: $k = \operatorname{argmax}_{j \in N} z_j$
  - Mohó (greedy): válasszuk azt a változót, ami a legnagyobb növekedést okozza a célfüggvényben
  - Bland's pivoting rule: válasszuk a legkisebb indexű nembázisváltozót amire $z_j > 0$ és ha több bázisváltozóra is $x_{B_r} = 0$, válasszuk a legkisebb indexűt kilépő változónak
  - Bland szabályának használatával elkerülhető a cycling

A szimplex algoritmus: komplexitás

- A Dantzig pivot szabály használata esetén a szimplex algoritmus komplexitása *exponenciális* lehet
- Legrosszabb esetben végig kell nézni akár $\binom{n}{m}$ bázismegoldást
- Adható példa, ahol ez bekövetkezik
- Szinte minden determinisztikus szabályhoz van ellenpélda
- Nyitott kérdés: van-e determinisztikus szabály, amely az exponenciálisnál jobb futási időt ad?
- A gyakorlatban a szimplex algoritmus nagyon gyors
- Általában m és n függvényében lineáris számú pivot elég
- Léteznek garantáltan polinom-idejű belsőpontos megoldó algoritmusok (Hacsián-féle ellipszoid módszer, Karmarkar algoritmusa)

A szimplex tábla

- A szimplex algoritmus jelen formájában minden lépésben három lineáris egyenletrendszer megoldását igényli
- A szimplex táblák használatával ez elkerülhető
- Tegyük fel, hogy van egy kezdeti megengedett bázismegoldásunk $\boldsymbol{B}$ bázissal
- Legyen z egy új változó, ami célfüggvény aktuális értékét jelöli

$$z = \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c_N}^T \boldsymbol{x_N}$$

- Tekintsük a lineáris programot az alábbi formában

$$\begin{array}{llcccccc}
\max & z & & & & & & \\
\text{s.t.} & z & - & \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{x_B} & - & \boldsymbol{c_N}^T \boldsymbol{x_N} & = & 0 \\
 & & & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} & + & \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} & = & \boldsymbol{b} \\
 & & & \boldsymbol{x_B}, & & \boldsymbol{x_N} & \geq & \boldsymbol{0}
\end{array}$$

A szimplex tábla

- A $\boldsymbol{x_N}$ megadja $\boldsymbol{x_B}$-t: $\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
- És tudjuk, hogy $z = \boldsymbol{c_B}^T \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x_N}$

$$z + \mathbf{0}\boldsymbol{x_B} + (\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T)\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- A nembázisváltozók terében

$$\begin{array}{lccccccc}
\max & z & & & & & & \\
\text{s.t.} & z & + & \mathbf{0}\boldsymbol{x_B} & + & (\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T)\boldsymbol{x_N} & = & \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\
 & & & \boldsymbol{I}_m\boldsymbol{x_B} & + & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} & = & \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\
 & & & \boldsymbol{x_B}, & & \boldsymbol{x_N} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}$$

- A fenti alak táblázat formájában

	z	$\boldsymbol{x_B}$	$\boldsymbol{x_N}$	RHS	
z	1	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T$	$\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	0. sor
$\boldsymbol{x_B}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{I}_m$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	1..m sorok

A szimplex tábla

	z	x_{B_1}	$\ldots$	x_{B_m}	x_{N_1}	$\ldots$	$x_{N_{n-m}}$	RHS
z	1	0	$\ldots$	0	z_1	$\ldots$	z_{n-m}	z_0
x_{B_1}	0	1	$\ldots$	0	$y_{1,1}$	$\ldots$	$y_{1,n-m}$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	$\ldots$	1	$y_{m,1}$	$\ldots$	$y_{m,n-m}$	$\bar{b}_m$

$x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ sorra a bázisváltozók

$x_{N_1}, x_{N_2}, \ldots, x_{N_{n-m}}$ sorra a nembázisváltozók

z_j a $\boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T$ sorvektor j nembázisváltozóhoz tartozó eleme és $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$

$\bar{b}_i$ a $\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}$ oszlopvektor i-edik eleme

y_{ij} a $\boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N}$ mátrix (i, j) eleme

A szimplex tábla: belépő változó

- A célfüggvény alakja a korábbiakhoz képest megváltozott

$$z + \sum_{j \in N} z_j x_j = z_0$$

- A célfüggvény értékének növeléséhez olyan k nembázisváltozót kell keresnünk, amelyre $z_k < 0$
- A belépő változó a tábla nulladik sorából kiolvasható
  - A bázisba belép k nembázisváltozó

$$k = \operatorname*{argmin}_{j \in N} z_j$$

  - Optimalitási feltétel

$$z_k = \min_{j \in N} z_j \geq 0$$

A szimplex tábla: kilépő változó

- A bázisváltozók kifejezése a szimplex táblában

$$\boldsymbol{I}_m \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- A x_{B_i} bázisváltozó a tábla i-edik sorából olvasható ki

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} y_{ij} x_j = \bar{b}_i$$

  - x_{B_i} értéke x_k növelésére $y_{ik}x_k$-val csökken
  - nemkorlátos a megoldás, ha nincs pozitív elem k oszlopában: $\boldsymbol{y}_k \leq 0$
  - a bázisból kilépő r változó

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\dots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

A szimplex tábla: pivot

- Tegyük fel, hogy k belép a bázisba r kilép
- A pivot előtt a szimplex tábla

	z	$x_{B_1} \ldots x_{B_r} \ldots x_{B_m}$	$\ldots x_{N_j} \ldots x_{N_k} \ldots$	RHS
z	1	$0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 0$	$\ldots\; z_j \;\ldots\; z_k \;\ldots$	z_0
x_{B_1}	0	$1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 0$	$\ldots\; y_{1j} \;\ldots\; y_{1k} \;\ldots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$0 \;\ldots\; 1 \;\ldots\; 0$	$\ldots\; y_{rj} \;\ldots\; y_{rk} \;\ldots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 1$	$\ldots y_{mj} \ldots y_{mk} \ldots$	$\bar{b}_m$

A szimplex tábla: pivot

1. Osszuk el az r-edik sort y_{rk}-val

	z	$x_{B_1} \ldots x_{B_r} \ldots x_{B_m}$	$\ldots x_{N_j} \ldots x_{N_k} \ldots$	RHS
z	1	$0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 0$	$\ldots\; z_j \;\ldots\; z_k \;\ldots$	z_0
x_{B_1}	0	$1 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 0$	$\ldots\; y_{1j} \;\ldots\; y_{1k} \;\ldots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$0 \;\ldots\; \frac{1}{y_{rk}} \;\ldots\; 0$	$\ldots\; \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \;\ldots\; 1 \;\ldots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; 1$	$\ldots\; y_{mj} \;\ldots\; y_{mk} \;\ldots$	$\bar{b}_m$

A szimplex tábla: pivot

2. Minden $i = 1, 2, \ldots, m : i \neq r$ sorra vonjuk ki a sorból az r-edik sor y_{ik}-szorosát

	z	$x_{B_1} \ldots x_{B_r} \ldots x_{B_m}$	$\ldots \quad x_{N_j} \quad \ldots x_{N_k} \ldots$	RHS
z	1	$0 \ldots 0 \ldots 0$	$\ldots \quad z_j \quad \ldots \; z_k \; \ldots$	z_0
x_{B_1}	0	$1 \ldots \frac{-y_{1k}}{y_{rk}} \ldots 0$	$\ldots \; y_{1j} - y_{1k}\frac{y_{rj}}{y_{rk}} \; \ldots \; 0 \; \ldots$	$\bar{b}_1 - y_{1k}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	$0 \ldots \frac{1}{y_{rk}} \ldots 0$	$\ldots \quad \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad \ldots \; 1 \; \ldots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$0 \ldots \frac{-y_{mk}}{y_{rk}} \ldots 1$	$\ldots \; y_{mj} - y_{mk}\frac{y_{rj}}{y_{rk}} \; \ldots \; 0 \; \ldots$	$\bar{b}_m - y_{mk}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

A szimplex tábla: pivot

3. Vonjuk ki a nulladik sorból az r-edik sor z_k-szorosát

	z	$x_{B_1} \ldots \quad x_{B_r} \quad \ldots x_{B_m}$	$\ldots \quad x_{N_j} \quad \ldots x_{N_k} \ldots$	RHS
z	1	$0 \quad \ldots -z_k \frac{y_{1k}}{y_{rk}} \ldots \quad 0$	$\ldots \quad z_j - z_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots$	$z_0 - z_k \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	0	$1 \quad \ldots \quad \frac{-y_{1k}}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 0$	$\ldots \quad y_{1j} - y_{1k} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots$	$\bar{b}_1 - y_{1k} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_k	0	$0 \quad \ldots \quad \frac{1}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 0$	$\ldots \quad \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots$	$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	$0 \quad \ldots \quad \frac{-y_{mk}}{y_{rk}} \quad \ldots \quad 1$	$\ldots y_{mj} - y_{mk} \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \ldots \quad 0 \quad \ldots$	$\bar{b}_m - y_{mk} \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$

- x_k belépett a bázisba, ezért az új szimplex táblában az r-edik sor most már x_k-t adja meg
- x_{B_r} kilépett a bázisból és nembázis változó lett

A szimplex tábla: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 9 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Slack-változókkal standard alakra hozva

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & -x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & & & & & = & 9 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 4 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

A szimplex tábla: példa

- Először kezdeti bázist kell választanunk: álljon ez a slack-változók oszlopaiból
- Kanonikus alakban adott $\max\{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ lineáris program esetén a bevezetendő $\boldsymbol{x}_s$ slack-változók oszlopai mindig bázist alkotnak: $\max\{\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_s \geq \boldsymbol{0}\}$ és $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ mindig nemszinguláris
- Ha ráadásul $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, akkor ez a bázis egyben megengedett is, hiszen $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$
- Ellenkező esetben a kezdeti bázis keresése speciális lépéseket igényel (itt nem tárgyaljuk)
- Legyen tehát $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a_4} \quad \boldsymbol{a_5} \quad \boldsymbol{a_6}]$
- A nulladik sor: $\boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c_N}^T = -\boldsymbol{c_N}^T$ mert az $\boldsymbol{x}_s$ bázisváltozókhoz a célfüggvényben 0 együttható áll és így $\boldsymbol{c_B}^T = \boldsymbol{0}$, és hasonlóan $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = 0$

A szimplex tábla: példa

- A kezdeti szimplex tábla (a nulladik sort invertálni kell!)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	1	-4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	0	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	4

- A bázis nem optimális mert $z_3 = -4$
- A belépő változó x_3 mert $z_3 = \min_{j \in N} z_j = -4$
- Nem kapunk nemkorlátos eredményt, mert van $y_{i3} > 0$
- A kilépő változó x_6 mert $\frac{\bar{b}_6}{y_{63}} = \min\{\frac{9}{2}, 4\} = 4$

A szimplex tábla: példa

1. Osszuk el az x_6 sorát y_{63}-mal, ami most 1
   - a tábla sorait most a hozzá tartozó bázisváltozó indexével azonosítjuk, és nem a sorindexszel
   - ezért az $\boldsymbol{x}_6$ sorának elemei rendre az y_{6j} és $\bar{b}_6$ indexet kapják
   - hasonlóan a többi sorra

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	1	-4	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	9
x_5	0	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	0	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	4

A szimplex tábla: példa

2. Az x_4 és x_5 sorából vonjuk ki az x_6 sorának y_{4k}- illetve y_{5k}-szorosát
   - az x_4 sorából az x_6 sorának kétszeresét kell kivonni
   - lényeg az y_{43} és az y_{53} kinullázása

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	1	1	-4	0	0	0	0
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_6	0	-1	1	$\boxed{1}$	0	0	1	4

A szimplex tábla: példa

3. Vonjuk ki a nulladik sorból az x_6 sorának z_3-szorosát
   - most az x_6 sorának négyszeresét kell hozzáadni a nulladik sorhoz
   - lényeg a z_3 kinullázása

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-3	5	0	0	0	4	16
x_4	0	$\boxed{3}$	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

- Pivot vége, új szimplex bázist kaptunk ($B = \{x_3, x_4, x_5\}$)
- A szimplex tábla utolsó sora most már az x_3-hoz tartozik, érdemes ezt a szimplex táblán jelölni

A szimplex tábla: példa

- A szimplex tábla használata
  - a nulladik sor utolsó eleme mindig a célfüggvény az aktuális bázishoz tartozó értéke, most $z = 16$
  - a bázisváltozók értékeit kiolvashatjuk az RHS oszlopból (ha negatív elem van benne, elrontottunk valamit)
  - ha a nulladik sor nem tartalmaz negatív elemet, optimális a bázis

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	−3	5	0	0	0	4	16
x_4	0	3	−1	0	1	0	−2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	−1	1	1	0	0	1	4

A szimplex tábla: példa

- Az aktuális tábla nem optimális, mert $z_1 = -3$
- Tehát belép a bázisba x_1
- Van kilépő változó (vagyis nem kaptunk nemkorlátos megoldást), mert $y_{41} > 0$. Kilép x_4

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	-3	5	0	0	0	4	16
x_4	0	$\boxed{3}$	-1	0	1	0	-2	1
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	-1	1	1	0	0	1	4

- Osztjuk x_4 sorát 3-mal, a kapott sort hozzáadjuk x_3 sorához egyszer, és a nulladik sorhoz háromszor

A szimplex tábla: példa

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	4	0	1	0	2	17
x_1	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

- A bázis optimális
- Az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvény értéke a nulladik sor utolsó eleme: $z = 17$
- A bázisváltozók értékei az RHS oszlopból: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 6 \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$
- Az optimális megoldás: $\boldsymbol{x}^T = [\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{13}{3}]$

A szimplex tábla: példa

- Oldjuk meg a következő lineáris programot

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 0 \\
 & & - & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & & & \leq & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Slack-változókkal standard alakra hozva

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\max & -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & + & 0x_6 & & \\
\text{s.t.} & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & = & 0 \\
 & & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & & + & x_5 & & & = & 1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 3 \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}
$$

A szimplex tábla: példa

- A kezdeti szimplex tábla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	2	-1	-3	0	0	0	0
x_4	0	2	-3	$\boxed{1}$	1	0	0	0
x_5	0	0	-2	4	0	1	0	1
x_6	0	-1	-1	0	0	0	1	3

- x_3 belép a bázisba, x_4 kilép
- x_4 sorának négyszeresét kivonjuk x_5 sorából, és a háromszorosát hozzáadjuk a nulladik sorhoz
- Degenerált pivot, mert $b_4 = 0$. A pivot után ugyanabban az extrém pontban fogunk maradni

A szimplex tábla: példa

- A pivot utáni szimplex tábla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	8	-10	0	3	0	0	0
x_3	0	2	-3	1	1	0	0	0
x_5	0	-8	$\boxed{10}$	0	-4	1	0	1
x_6	0	-1	-1	0	0	0	1	3

- x_2 belép a bázisba, x_5 kilép

A szimplex tábla: példa

- Az új szimplex tábla

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	1	0	0	0	-1	1	0	1
x_3	0	$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
x_2	0	$-\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$
x_6	0	$-\frac{9}{5}$	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	1	$\frac{31}{10}$

- A bázisba belépő változó x_4
- Azonban x_4 oszlopában minden elem negatív. Vagyis x_4 szabadon növelhető anélkül, hogy bármely változó értéke negatívvá válna, miközben a célfüggvény értéke szintén nő
- Nincs korlátos megoldás

A szimplex tábla: példa

- A szimplex táblából kiolvasható a nemkorlátosságot okozó $\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d} : \lambda \geq 0$ félegyenes egyenlete
  - $\bar{\boldsymbol{x}}$ az aktuális bázismegoldás
  - $\boldsymbol{d}$ előáll a szimplex tábla x_4 nembázisváltozóhoz tartozó oszlopából

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{31}{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \lambda, \quad \lambda \geq 0$$

- Az indexelésre és az előjelekre vigyázni kell