A szimplex algoritmus

- Ismétlés: reprezentációs tétel, az optimális megoldás és az extrém pontok kapcsolata
- Alapfogalmak: bázisok, bázismegoldások, megengedett bázismegoldások, degenerált bázismegoldás
- A szimplex algoritmus, indítás megengedett bázismegoldásról, áttérés a nembázis változók terére, új változó felvétele a bázisba, változó kiléptetése a bázisból, végződtetés, optimalitás

Lineáris programok és extrém pontok

- Egy $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ lineáris program optimális megoldása előáll a megengedett tartomány valamely extrém pontján
- Ha a megengedett tartományt reprezentáló X poliéder korlátos, akkor X felírható $\boldsymbol{x}_j$ extrém pontjainak konvex kombinációjaként

$$X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\} = \mathrm{conv}\left(\boldsymbol{x}_j : j \in \{1, \ldots, k\}\right)$$

- Emlékeztető: konvex kombináció

$$\mathrm{conv}(\boldsymbol{x}_j) = \left\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}_j, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \ge 0\right\}$$

Lineáris programok és extrém pontok

- Ekvivalens lineáris program λ_j változókban

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_j)\lambda_j : \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \ldots, k\} \right\}$$

- A megoldás előáll a megengedett tartomány valamely extrém pontján

$$\boldsymbol{x}_{\text{opt}} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}_j : j \in \{1,\ldots,k\}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_j$$

$$z_{\text{opt}} = \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}_j$$

ahol z_{opt} a célfüggvény optimumát fogja jelölni

Extrém pont megoldások: példa

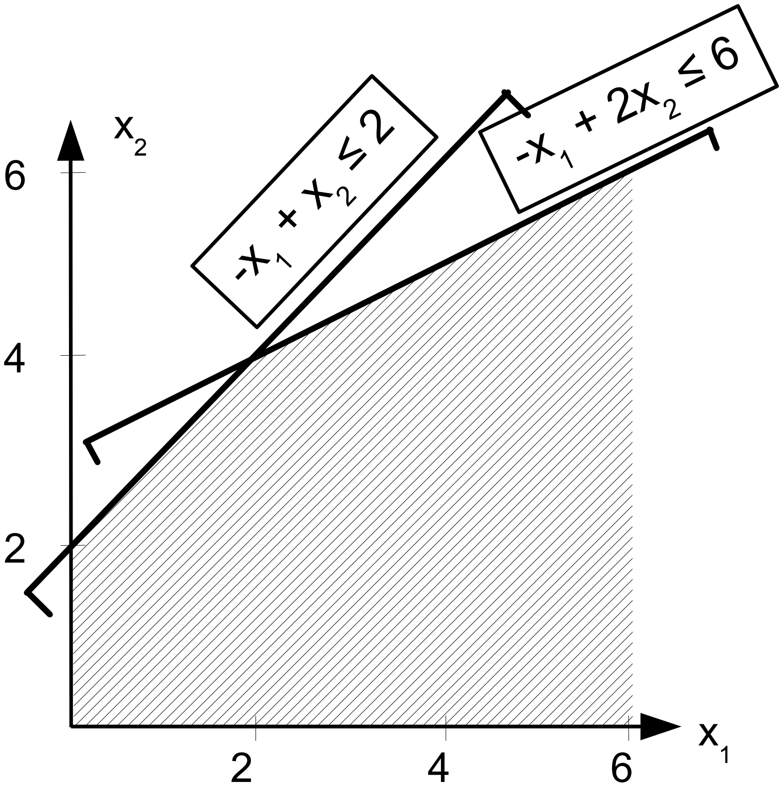
- Tekintsük az alábbi feltételrendszert

$$\begin{array}{rcrcl} -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Extrém pontok:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Extrém pont megoldások: példa

- Tegyük fel, hogy a $-4x_1 + x_2$ célfüggvényt szeretnénk maximalizálni
  $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_1 = [-4 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0$, $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_2 = [-4 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = 2$,
  $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_3 = [-4 \quad 1]\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} = -4$
- A megoldás az extrém pontok közül az, amelyik maximalizálja a $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_j$ szorzatot

$$\boldsymbol{x}_{\text{opt}} = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}_j : j \in \{1,\ldots,k\}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_j = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

$$z_{\text{opt}} = \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_j = 2$$

Extrém pont megoldások: példa

- Ha most ehelyett a $-x_1 + 3x_2$ célfüggvényt szeretnénk maximalizálni, akkor nincs véges megoldás
- Ekkor ugyanis választható $\boldsymbol{d}$ irányvektor és $\boldsymbol{x}_0$ megengedett megoldás, hogy $\boldsymbol{x}_0$-ból $\boldsymbol{d}$ irány mentén haladva tetszőlegesen nagy megengedett megoldást kapunk
- Vagyis az $\boldsymbol{x}_0 + \mu\boldsymbol{d}$ minden $\mu \geq 0$ esetén megengedett, és növeli a célfüggvény értékét
- Például ha $\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, akkor $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ megoldás megengedett minden $\mu \geq 0$-ra és a célfüggvény értéke $\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}_0 + \mu\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}_0 + \mu\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d}$
- **Lemma:** a nemkorlátossághoz elégséges $\exists \boldsymbol{d} : \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} > 0$
- Itt teljesül, mert $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}^T \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 1 > 0$

Bázismegoldások

- Az extrém pontok geometriai értelemben írják le egy lineáris program megoldásait
- A megoldáshoz viszont algebrai értelmezés kell: megengedett bázismegoldások
- Tekintsük a $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ poliéderrel adott feltételrendszert, ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\boldsymbol{b}$ egy oszlop m-vektor, $\boldsymbol{x}$ pedig oszlop n-vektor
- Tegyük fel, hogy $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$
- Ekkor $\boldsymbol{A}$ oszlopait átrendezve $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]$, ahol
  - $\boldsymbol{B}$ egy $m \times m$ méretű kvadratikus, nemszinguláris mátrix (a **bázis**)
  - $\boldsymbol{N}$ pedig $m \times (n - m)$ méretű mátrix (a **nembázis**)

Bázismegoldások

- Megjegyzés: a sorok és oszlopok szabadon átrendezhetőek egy lineáris programban
- Rendezzük át $\boldsymbol{x}$-et: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix}$, ahol $\boldsymbol{x_B}$ **bázisváltozók** a $\boldsymbol{B}$ oszlopaihoz tartozó, és $\boldsymbol{x_N}$ **nembázisváltozók** az $\boldsymbol{N}$ oszlopaihoz tartozó változók
- A feltételrendszert $\boldsymbol{B}$ bázisban felírva

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{b}$$

- Mivel $\boldsymbol{B}$ bázis nemszinguláris, szorozhatunk balról az inverzével

$$\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Bázismegoldások

- Megkaptuk a bázisváltozókat a nembázisváltozók függvényében

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}$$

- $\boldsymbol{x_N}$-t nullára választva adódik a $\boldsymbol{B}$ bázishoz tartozó **bázismegoldás**

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \;\; \boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

- Ha még ráadásul $\boldsymbol{x_B} \geq \boldsymbol{0}$, akkor **megengedett bázismegoldást** kaptunk

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{x_N} = \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \geq \boldsymbol{0}$$

Bázismegoldások

- Ha $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$ minden komponense pozitív ($\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} > \mathbf{0}$), akkor $\boldsymbol{x}$ **nemdegenerált bázismegoldás**, ellenkező esetben pedig **degenerált bázismegoldás**
- A megengedett bázismegoldások jelentősége, hogy ezek megfelelnek a lineáris program megengedett tartománya extrém pontjainak
- **Tétel:** $\boldsymbol{x}$ akkor és csak akkor megengedett bázismegoldása egy $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ lineáris programnak, ha $\boldsymbol{x}$ az $X = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ megengedett tartomány egy extrém pontja
- Ha ráadásul $\boldsymbol{x}$ még nemdegenerált is, akkor egyedi $\boldsymbol{B}$ bázis azonosítja
- A megengedett bázismegoldásokon iterálva előállítható a lineáris program optimális megoldása: szimplex algoritmus

Bázismegoldások: példa

- Tekintsük a megengedett tartományt

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 3 \\ x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- A fenti példa kanonikus alakban van, standard alakra kell hoznunk
- Addicionális (slack) változókat vezetünk be: x_3 és x_4

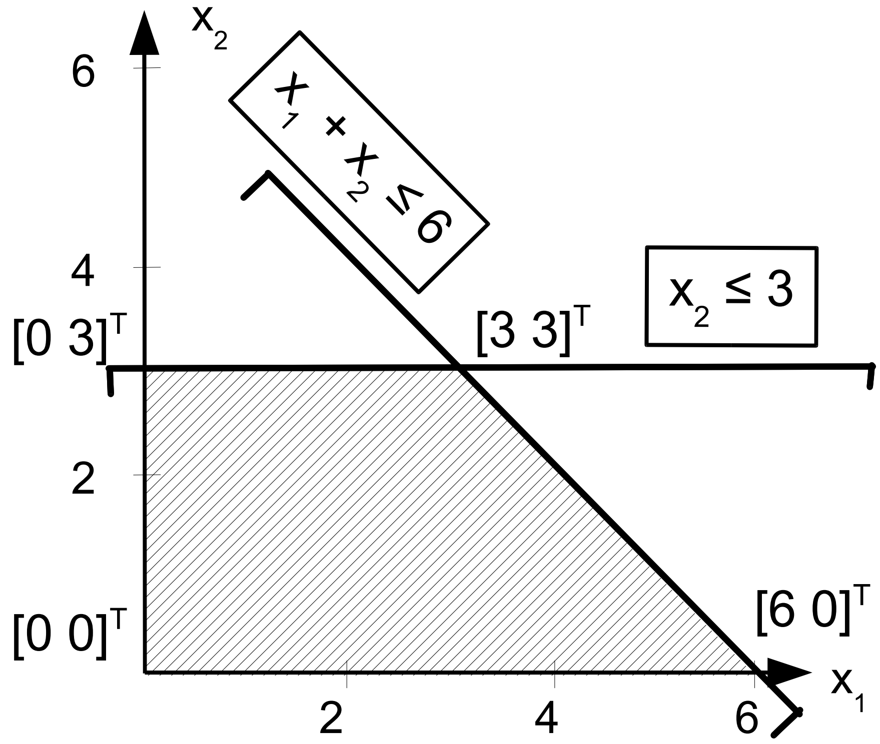
$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 3 \\ x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Bázismegoldások: példa

- A feltételrendszer mátrixa

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{A}$ teljes sorrangú, ezért bázisai 2×2 méretűek
- Ezek közül azok eredményeznek megengedett bázismegoldást, melyekre $\boldsymbol{B}$ nemszinguláris és $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$



Bázismegoldások: példa

1. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ megengedett bázis

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, extrém pont: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ megengedett bázis

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, extrém pont: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bázismegoldások: példa

3. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ megengedett bázis

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, extrém pont: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nem megengedett bázis

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} \ngeq \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bázismegoldások: példa

5. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ megengedett bázismegoldás

$$\boldsymbol{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

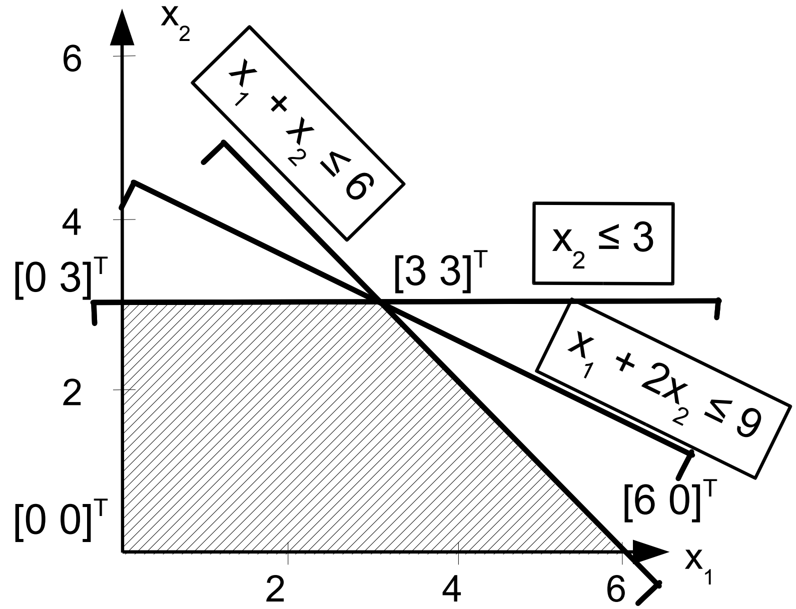
$\boldsymbol{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, extrém pont: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ szinguláris, nem generál bázismegoldást

Degenerált bázismegoldások: példa

- Adjunk egy új, „redundáns” feltételt az előbbihez

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & + & 2x_2 & \leq & 9 \\
x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$



- A slack változókkal standard alakra hozott rendszer

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\
 & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\
x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 9 \\
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Degenerált bázismegoldások: példa

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$ bázishoz tartozó megengedett bázismegoldás degenerált bázismegoldás

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \not> \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, extrém pont: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Degenerált bázismegoldások: példa

- Hasonlóan a $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4]$ is degenerált bázis

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \not> \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ extrém pont: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- A két degenerált bázismegoldáshoz ugyanaz az extrém pont tartozik
- Egy kétdimenziós térben egy extrém pontot két hipersík határoz meg
- Az $\boldsymbol{x} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ extrém pontban azonban 3 hipersík találkozik

A szimplex algoritmus

- Láttuk, hogy egy lineáris program megoldása, ha létezik, előáll a megengedett tartomány valamely extrém pontján
- Az extrém pontok pedig megfelelnek a megengedett bázismegoldásoknak
- Ezekből sajnos $\binom{n}{m}$ számú lehet, ezeket lehetetlen egyenként előállítani már pár tucat változó esetén is
- A szimplex algoritmus egy módszer, amely egy megengedett bázismegoldásból kiindulva újabb és újabb, a célfüggvény értékét javító megengedett bázismegoldásokat állít elő
- A gyakorlatban a szimplex az extrém pontok csak egy kis hányadát járja be

A szimplex algoritmus

- Tekintsük az alábbi lineáris programot

$$\begin{aligned} z = \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ mátrix, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m$, $\boldsymbol{b}$ egy oszlop m-vektor, $\boldsymbol{x}$ pedig oszlop n-vektor
- Legyen $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ egy kezdeti megengedett bázismegoldás, $\boldsymbol{B}$ a hozzá tartozó bázis, és $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]$
- Felírjuk a lineáris programot a nembázisváltozók terében
- Így megtudjuk, hogy az ezek megváltoztatása hogyan befolyásolná a célfüggvény és a bázisváltozók értékét

A szimplex algoritmus

- A feltételrendszert $\boldsymbol{B}$ bázisban felírva

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}, \text{ vagyis } \boldsymbol{Bx_B} + \boldsymbol{Nx_N} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N} \qquad (*)$$

- Legyen N a nembázis változók halmaza, jelöljük a $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ mátrix oszlopait sorra $\boldsymbol{y}_j$-vel minden $j \in N$-re és legyen $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
- Ekkor a feltételrendszer a nembázisváltozók szerint

$$\boldsymbol{x_B} = \bar{\boldsymbol{b}} - \sum_{j \in N} \boldsymbol{y}_j x_j$$

A szimplex algoritmus

- Rendezzük át a célfüggvényt is a bázisváltozókhoz tartozó tagokat előrehozva: $\boldsymbol{c}^T = [\boldsymbol{c_B}^T \quad \boldsymbol{c_N}^T]$
- Behelyettesítve a célfüggvénybe és felhasználva (*)-ot

$$z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{c_B}^T \quad \boldsymbol{c_N}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_B} \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix} = \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{x_B} + \boldsymbol{c_N}^T\boldsymbol{x_N} =$$

$$\boldsymbol{c_B}^T(\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}) + \boldsymbol{c_N}^T\boldsymbol{x_N} =$$

$$\boldsymbol{c_B}^T\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x_N}$$

- Legyen $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T\mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ és jelöljük $\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ sorvektor elemeit z_j-vel minden $j \in N$-re

$$z = z_0 + \sum_{j \in N} z_j x_j$$

A szimplex algoritmus

- A **lineáris program a nembázis változók** terében

$$\begin{aligned} \max \quad & z_0 + \textstyle\sum_{j \in N} z_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x_B} = \bar{\boldsymbol{b}} - \textstyle\sum_{j \in N} \boldsymbol{y}_j x_j \\ & \boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol
  - N a nembázis változók halmaza
  - $\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$
  - $\boldsymbol{y}_j$ a $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ mátrix j-edik nembázis-változóhoz tartozó oszlopa
  - $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c_B}^T \bar{\boldsymbol{b}}$
  - z_j a $\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ sorvektor j-edik nembázis-változóhoz tartozó eleme

A szimplex algoritmus: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$\begin{array}{lcccccc} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

- Bevezetve a slack-változókat

$$\begin{aligned} \max \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{aligned}$$

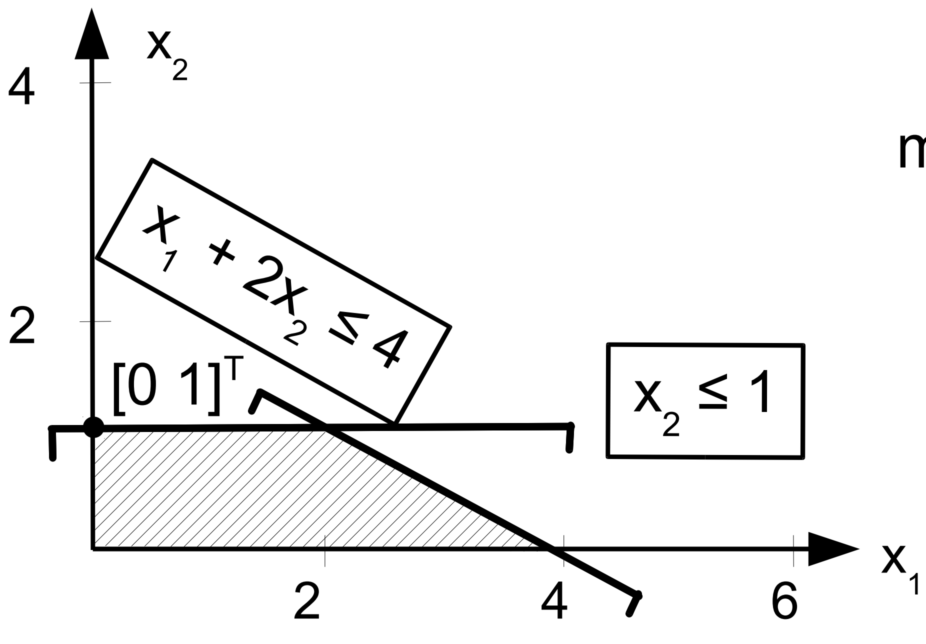
A szimplex algoritmus: példa

- Legyen $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3]$, ekkor $B = \{2, 3\}$, $N = \{1, 4\}$
  $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
  $\boldsymbol{c_B}^T = [1 \quad 0]$, $\boldsymbol{c_N}^T = [1 \quad 0]$
  $\bar{\boldsymbol{b}} = \mathrm{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
  $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$
  $z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \bar{\boldsymbol{b}} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1$
  $\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = [1 \quad 0] - [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
  $[1 \quad 0] - [0 \quad 1] = [1 \quad -1]$

A szimplex algoritmus: példa

- A lineáris program a nembázis változók terében

$$\begin{array}{ll} \max & 1 + x_1 - x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$



A $\boldsymbol{B}$ bázishoz tartozó megengedett bázismegoldás:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szimplex algoritmus: pivot

- A lineáris program a nembázis változók terében

$$\begin{aligned} \max \quad & z_0 + \textstyle\sum_{j \in N} z_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x_B} = \bar{\boldsymbol{b}} - \textstyle\sum_{j \in N} \boldsymbol{y}_j x_j \\ & \boldsymbol{x_B}, \boldsymbol{x_N} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

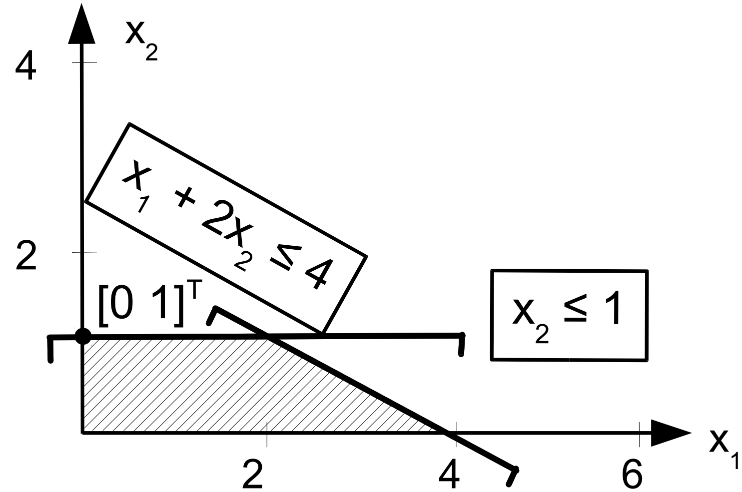
- Mivel $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x_N} \end{bmatrix}$ bázismegoldás, ezért $\boldsymbol{x_N} = \mathbf{0}$
- A fenti alak jelentősége, hogy megmondja
  - a célfüggvény és a bázisváltozók értékét az aktuális bázisban (a célfüggvény értéke z_0, és $\boldsymbol{x}_B = \bar{\boldsymbol{b}}$)
  - továbbá, hogy hogyan változna az egyes bázisváltozók és a célfüggvény értéke, ha az egyik nembázis változót nulláról elkezdenénk növelni

Pivot: példa

$$\max \quad 1 + x_1 - x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4$$

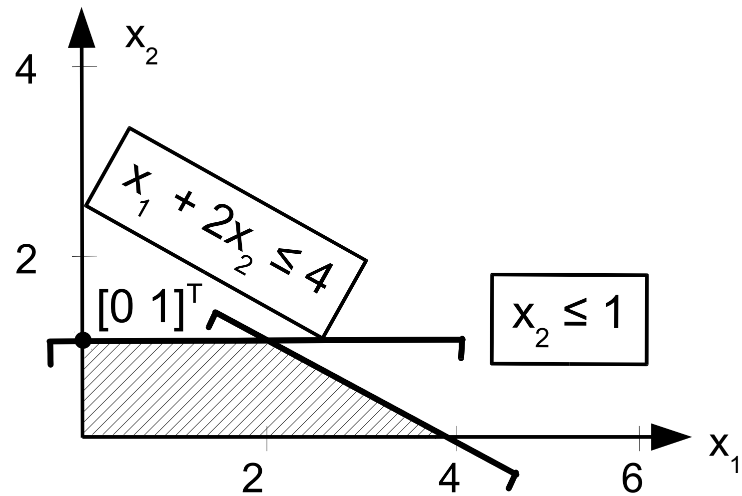
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$



- Például ha x_4-et nulláról 1-re növeljük míg x_1 marad 0
  - a célfüggvény értéke 1-ről nullára csökken, mert $z_4 = -1$
  - x_2 értéke 1-ről nullára csökken, mert $y_{24} = 1$
  - x_3 értéke 2-ről 4-re nő, mert $y_{34} = -2$
- x_4-et nem érdemes növelni, mert akkor a célfüggvény értéke csökken

Pivot: példa

$$\begin{array}{ll} \max & 1 + x_1 - x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$



- Ha a másik nembázis változót, x_1-et nulláról 1-re növeljük
  - a célfüggvény értéke 1-ről 2-re nő, mert $z_1 = 1$
  - x_2 értéke nem változik, mert $y_{21} = 0$
  - x_3 értéke 2-ről 1-re csökken, mert $y_{31} = 1$
- Érdemes x_1-et növelni, mert a célfüggvény értéke nő
- Addig növelhetjük, amíg valamelyik változó negatívvá válik
- Esetünkben $x_1 = 2$ esetén x_3 értéke 0, $x_1 > 2$-re negatív

A szimplex algoritmus: pivot

- Tekintsük a nembázisváltozót, amelynek a növelésével a célfüggvény értéke a legjobban nő

$$k = \operatorname*{argmax}_{j \in N} z_j$$

- Rögzítsünk minden más nembázisváltozót nullában és növeljük x_k-t

$$\begin{aligned} z &= z_0 + z_k x_k \\ \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \end{aligned}$$

A szimplex algoritmus: pivot

- Az x_k nembázis változót addig növelhetjük, amíg valamelyik bázisváltozó nullává nem válik
- Legyen $x_i : i \in B$ egy bázisváltozó, amelyre $y_{ik} > 0$
- Ekkor x_k nembázis változó növelésével x_i nemnegatív ha

$$0 \leq x_i = \bar{b}_i - y_{ik} x_k$$

$$x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$$

- Az első bázisváltozó, amely kinullázódik

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

A szimplex algoritmus: pivot

- Legyen az aktuális bázis nemdegenerált ($\bar{\boldsymbol{b}} > \mathbf{0}$) és tegyük fel, hogy $\exists k \in N : z_k > 0$ és $\exists i \in B : y_{ik} > 0$
- Legyen $k = \operatorname{argmax}_{j \in N} z_j, \quad r = \operatorname{argmin}_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
- x_k-t nulláról $\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$-ra növelve:

$$z = z_0 + z_k \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0, x_r = 0 & \\ x_{B_i} &= \bar{b}_i - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \bar{b}_r & i \in B \setminus \{r\} \\ x_j &= 0 & j \in N \setminus \{k\} \end{aligned}$$

- A célfüggvény értéke nő: $z > z_0$ mert $z_k \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$

A szimplex algoritmus: pivot

- **Tétel:** a fenti feltételekkel kapott pont megengedett bázismegoldás
- **Biz.:** a változók értéke a feltételek miatt nemnegatív, ezért elég belátnunk, hogy az új bázis, vagyis az $\boldsymbol{A}$ mátrix $\boldsymbol{a}_{B_1}, \boldsymbol{a}_{B_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{B_{r-1}}, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{B_{r+1}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{B_m}$ oszlopai is lineárisan függetlenek
- Ha $\boldsymbol{a}_k$-t felírjuk $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_{B_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{B_m}]$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, akkor $\boldsymbol{a}_r$ együtthatójának pontosan y_{rk} adódik

$$\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{N}_k = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k = \sum_{i \in B} \boldsymbol{a}_i y_{ik}$$

  mert $\boldsymbol{y}_k$ éppen $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ mátrix k-hoz tartozó oszlopa
- Az új bázis lineáris függetlensége következik $y_{rk} \neq 0$-ból az alábbi lemma felhasználásával $\square$

Egy lemma

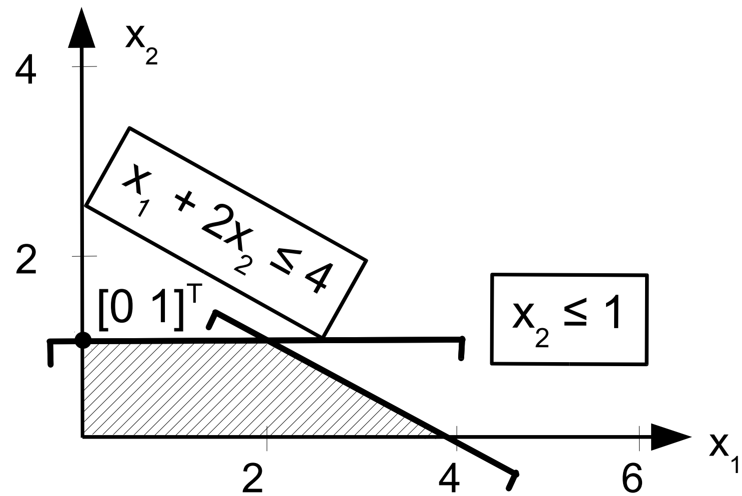
- **Lemma:** legyen $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ lineárisan független és cseréljük le az egyik $\boldsymbol{a}_j$ vektort egy $\boldsymbol{a}$ vektorra, mely $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ vektorokkal lineárisan összefüggő: $\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$. Ekkor $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ akkor és csak akkor lineárisan független, ha $\lambda_j \neq 0$
- A bizonyítástól most eltekintünk
- A pivot után kapott $\boldsymbol{x}$ tehát megengedett bázismegoldás
- Bázis, mert a kilépő változó tesztjében $y_{rk} \neq 0$ biztosítva van

$$r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1, \ldots, m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

- A k nembázisváltozó **belép** a bázisba, míg az r bázisváltozó kinullázódik és **kilép** a bázisból

Pivot: példa

$$\begin{array}{ll} \max & 1 + x_1 - x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$



- Belép a bázisba x_1, mert

$$z_1 = \max_{j \in N} z_j = \max\{1, -1\} = 1$$

- Kilép a bázisból x_3, mert

$$\frac{\bar{b}_3}{y_{31}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\} = \min\{2\} = 2$$

Pivot: példa

A pivot után kapott új pont

$k = 1, r = 3$

$B = \{1, 2\}, N = \{3, 4\}$

$z = z_0 + z_k \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 1 + 2 = 3$

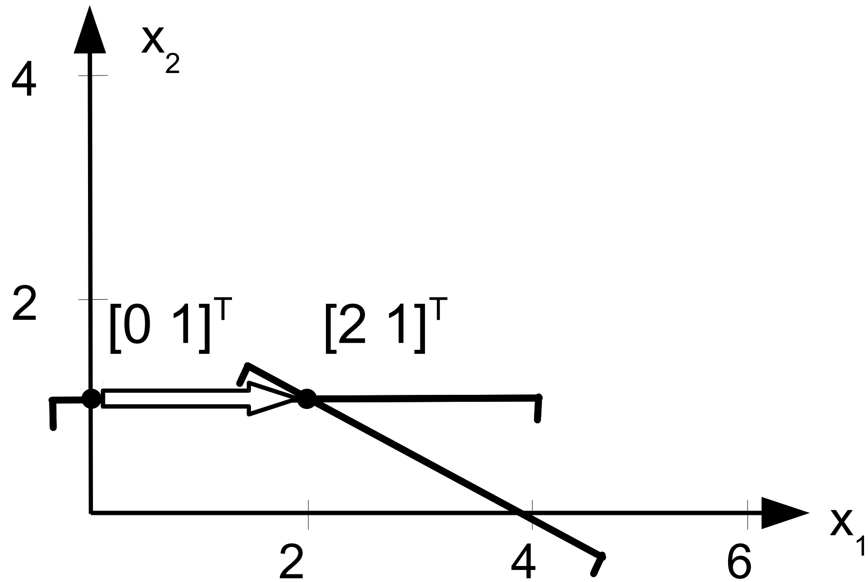
$x_1 = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = 2$

$x_2 = \bar{b}_2 - \frac{y_{2k}}{y_{3k}} \bar{b}_3 = 1 - 0 = 1$

$x_3 = \bar{b}_3 - \frac{y_{3k}}{y_{3k}} \bar{b}_3 = 2 - 2 = 0$

$x_4 = 0$

$\boldsymbol{x} = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$



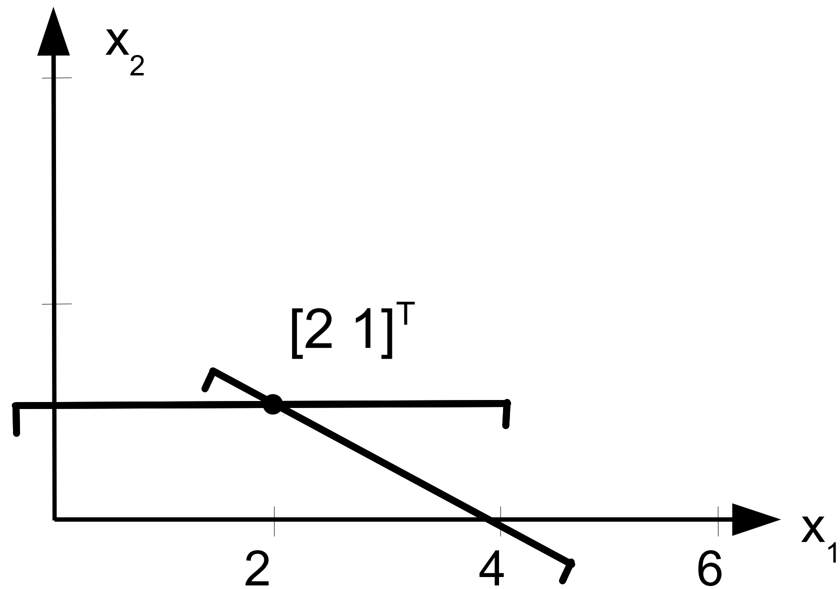
Pivot: példa

$$B = \{1,2\}, N = \{3,4\},$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B}^T = [1 \quad 1], \boldsymbol{c_N}^T = [0 \quad 0]$$



- Az új bázisban felírva a lineáris programot

$$\begin{aligned} \max \quad & 3 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Szimplex: optimális megoldás

- Emlékeztetőül a pivotszabályok
  - x_k beléphet a bázisba, ha $z_k > 0$
  - x_r kilép a bázisból: $r = \operatorname*{argmin}_{i \in \{1,\ldots,m\}} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$
- Ha minden $j \in N : z_j \leq 0$, akkor egyik nembázis változót sem érdemes növelni, mert ekkor nem növelnénk a célfüggvény értékét
- **Tétel:** a (primál) szimplex algoritmus optimalitási feltétele

$$\forall j \in N : z_j \leq 0$$

- **Biz.:** ha valamely $\boldsymbol{x}$ megengedett bázismegoldásra $\forall j \in N : z_j \leq 0$, akkor $\boldsymbol{x}$ lokális optimum
- Mivel a megengedett tartomány konvex és a célfüggvény konkáv, ezért $\boldsymbol{x}$ globális optimum is $\square$

Optimális megoldás: példa

- A korábbi példánknál maradva

$$\begin{array}{ll} \max & 3 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- Ez a bázismegoldás nem optimális, mert $z_4 > 0$
  - tehát x_4 belép a bázisba
  - és x_2 kilép a bázisból, mert

$$\frac{\bar{b}_2}{y_{24}} = \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{i4}} : y_{i4} > 0 \right\} = \min\{1\} = 1$$

Optimális megoldás: példa

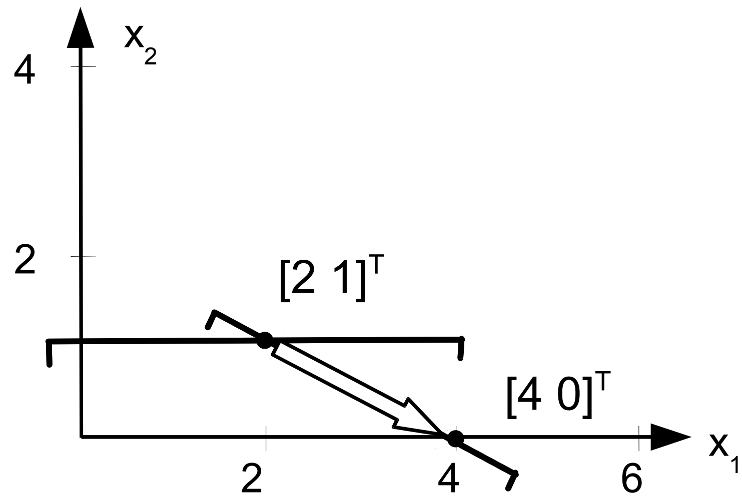
- Az új bázisban

$$B = \{1,4\}, N = \{2,3\}, \boldsymbol{c_B}^T = [1 \quad 0], \boldsymbol{c_N}^T = [1 \quad 0]$$

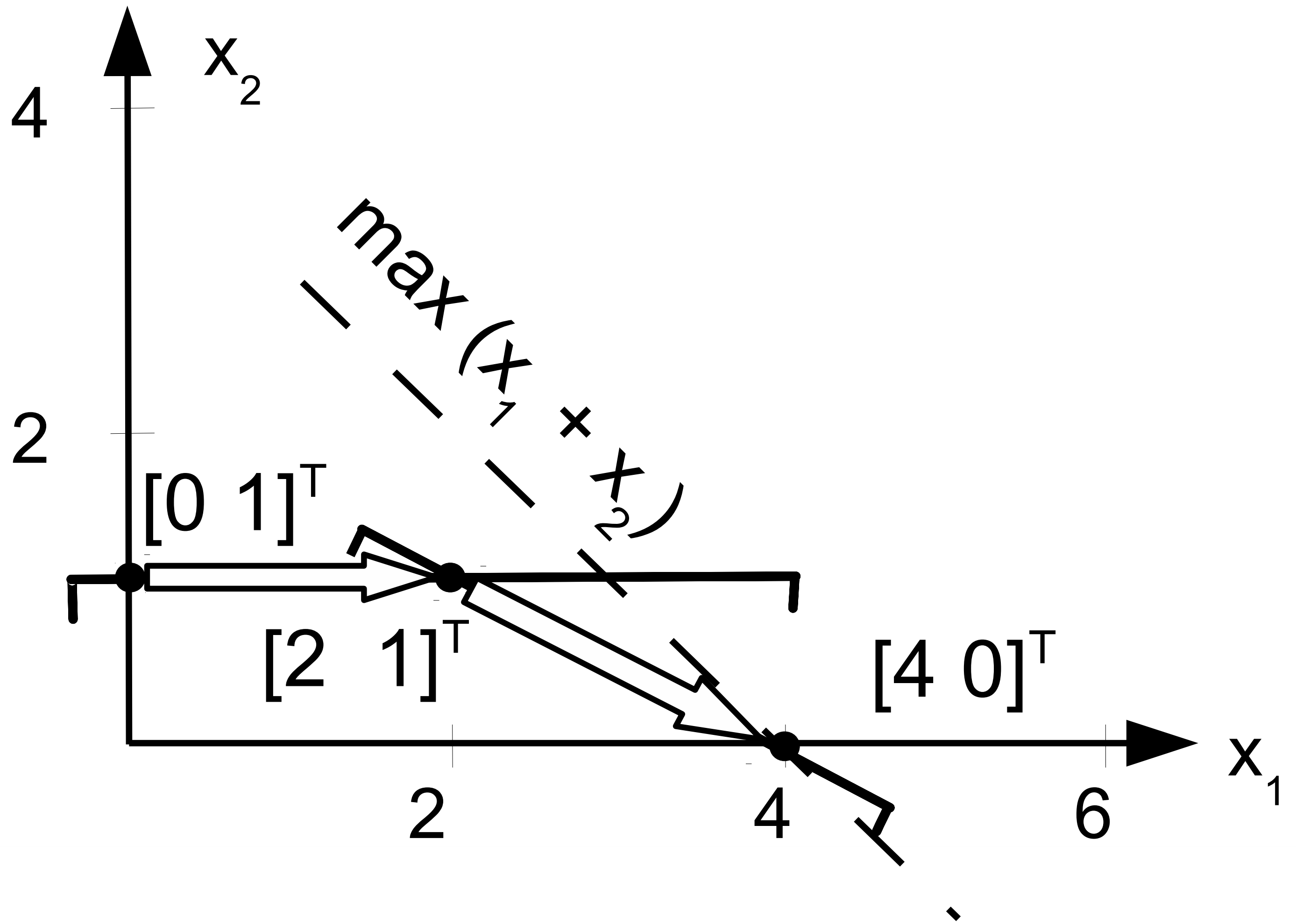
$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Az $\boldsymbol{x} = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$ megengedett bázismegoldás optimális

$$\begin{aligned} \max \quad & 4 - x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



Szimplex példa: összefoglalás



Egyedi optimális megoldás

- **Def.:** $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ lineáris programnak $\bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett megoldás **egyedi optimális megoldása**, ha minden $\boldsymbol{x} \neq \bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett megoldásra $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} < \boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}}$
- **Tétel:** az $\bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett bázismegoldás egyedi optimális megoldás, ha $\forall j \in N : z_j < 0$
- **Biz.** legyen $\boldsymbol{x}$ bármely $\bar{\boldsymbol{x}}$-től különböző megengedett megoldás, és legyen a hozzá tartozó célfüggvényérték z
- Legyen N az $\bar{\boldsymbol{x}}$ megengedett bázismegoldáshoz tartozó nembázis változók halmaza, ekkor

$$z = z_0 + \sum_{j \in N} z_j x_j$$

- $\exists j \in N : x_j > 0$ (különben $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$) és $z_j < 0 \Rightarrow z < z_0$ $\square$

Egyedi optimális megoldás: példa

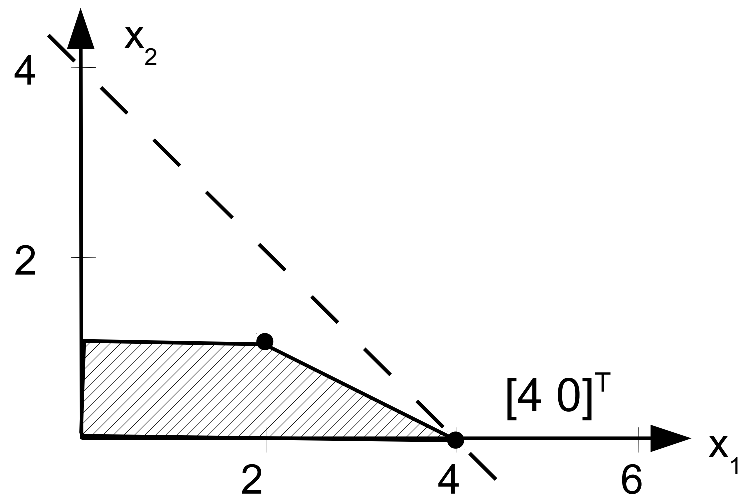
- Tekintsük az iménti lineáris program $\boldsymbol{x} = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$ megengedett bázismegoldását

$$B = \{1, 4\}, N = \{2, 3\}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c_B}^T = [1 \quad 0], \boldsymbol{c_N}^T = [1 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 4 - x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



- Tehát $\boldsymbol{x}$ egyedi, optimális megoldás

Alternatív optimális megoldások

- Tegyük fel, hogy $\bar{\boldsymbol{x}}$ optimális megengedett bázismegoldás (tehát $\forall j \in N : z_j \leq 0$), de létezik olyan nembázisváltozó, mondjuk k, melyre az optimalitási feltétel egyenlőséggel teljesül: $z_k = 0$
- Ha $\bar{\boldsymbol{x}}$ nemdegenerált, akkor x_k nulláról megnövelhető valamely $\epsilon > 0$-val anélkül, hogy kinullázódna valamelyik bázisváltozó

$$
\begin{aligned}
z &= z_0 + z_k x_k = z_0 + 0 x_k \\
\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k
\end{aligned}
$$

- Minden $0 < x_k \leq \epsilon$ választás optimális megengedett megoldást eredményez, hiszen $z_k = 0$ miatt a célfüggvény értéke nem változik

Alternatív optimális megoldások

- A lineáris program az x_k nembázisváltozó függvényében, $z_k = 0$ és minden más $z_j \leq 0$

$$\begin{aligned} \max \quad & z_0 + 0 x_k \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y}_k \\ \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix} x_k \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

  ahol szokás szerint $\boldsymbol{y}_k$ a $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ mátrix k-hoz tartozó oszlopa, $\boldsymbol{e}_k$ pedig a k-adik kanonikus egységvektor
- Alternatív optimális megoldásokat kapunk amíg $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \geq \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{b}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\boldsymbol{y}_k \\ \boldsymbol{e}_k \end{bmatrix} \qquad 0 \leq \lambda \leq \min_{i \in B} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}$$

Alternatív optimális megoldások: példa

- Tekintsük a lineáris programot

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & \geq & 0 \end{array}$$

- Slack-változókkal standard alakra hozva

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl} \max & 2x_1 & + & 4x_2 & & & & & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Alternatív optimális megoldások: példa

- Legyen a bázis $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- A bázishoz tartozó megengedett bázismegoldás

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternatív optimális megoldások: példa

- A bázismegoldáshoz tartozó paraméterek

$$\boldsymbol{c_B}^T = [2 \quad 0], \boldsymbol{c_N}^T = [4 \quad 0]$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z_0 = \boldsymbol{c_B}^T \bar{\boldsymbol{b}} = [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 8$$

$$\boldsymbol{c_N}^T - \boldsymbol{c_B}^T \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} = [4 \quad 0] - [2 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [4 \quad 0] - [4 \quad 2] = [0 \quad -2]$$

Alternatív optimális megoldások: példa

- A lineáris program a nembázisváltozók terében

$$\begin{aligned} \max \quad & 8 + 0x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} x_2 - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Alternatív optimális megoldások

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} : 0 < \lambda \leq \frac{5}{3}$$

- A $[4 \quad 0]^T$ és a $[\frac{2}{3} \quad \frac{5}{3}]^T$ pontok összes konvex kombinációja