

A lineáris programozás alapjai

- A konvex analízis alapjai: konvexitás, konvex kombináció, hipersíkok, félterek, extrém pontok
- Konvex és konkáv függvények, a gradiens, lokális és globális optimum, a konvex programozás alapjai
- Poliéderek, a Minkowski-Weyl tétel (a poliéderek reprezentációs tétele)
- Lineáris programok megoldhatósága a reprezentációs tétel alapján, a megoldások és az extrém pontok összefüggései
- Lineáris programok grafikus megoldása, a megengedett tartomány (korlátos, nem korlátos, üres), optimális megoldások (egyedi, alternatív, nem korlátos)

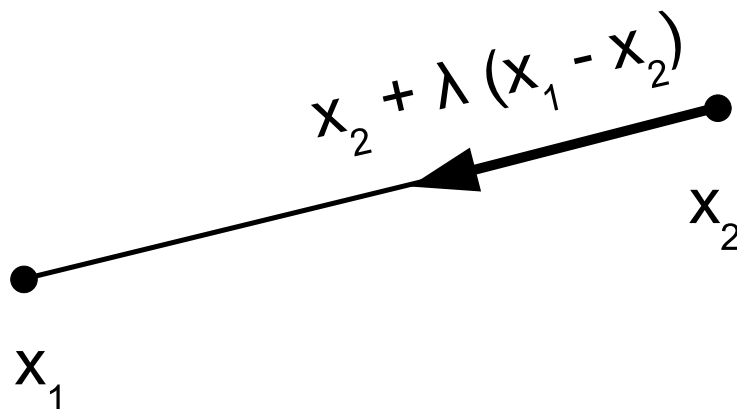
Konvex halmazok

- Minden $0 \leq \lambda \leq 1$ értékre a kifejezés

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$$

neve x_1 és x_2 **vektorok konvex kombinációja**

- Geometrialilag x_1 és x_2 konvex kombinációi egy x_1 és x_2 pontokat összekötő **vonalszakaszt** alkotnak

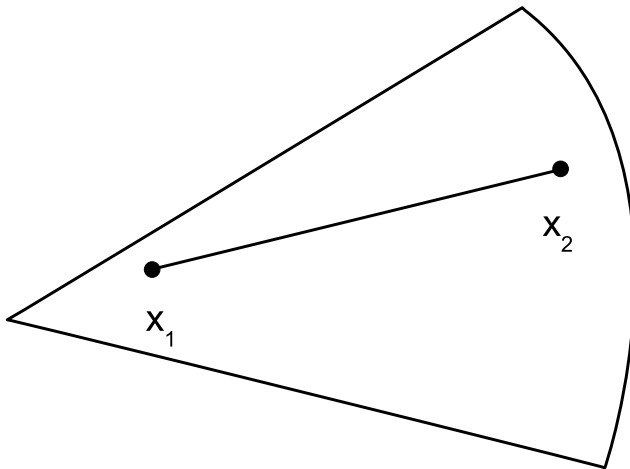


Konvex halmazok

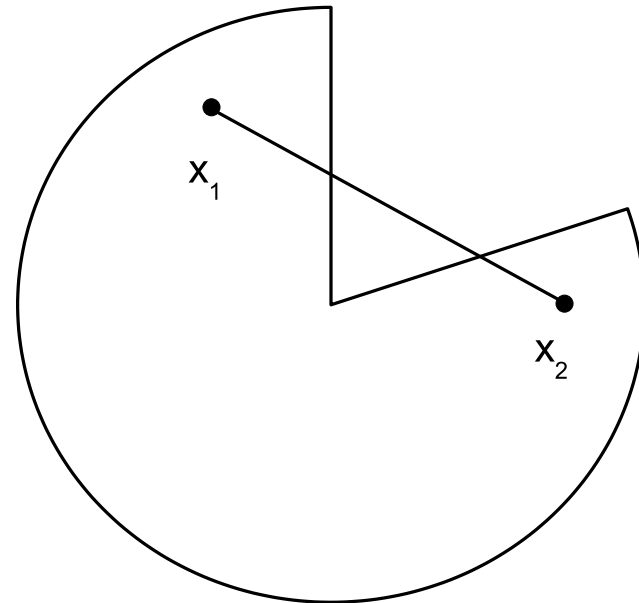
- Egy $X \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **konvex**, ha tetszőleges x_1 és x_2 pontjára igaz, hogy

$$\forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

- Vagyis X konvex, ha tartalmazza az összes pontjának összes konvex kombinációját



Konvex halmaz



Nemkonvex halmaz

Konvex halmazok: példák

- Tetszőleges $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ **pont konvex kombinációja:**

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, k\} : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

$$X = \text{conv}\{\mathbf{x}_i : 1 \leq i \leq k\}$$

- Gömb: $X = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + x^2 \leq 1\}$
- Vektortér: $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$
- „Eltolt” vektortér: $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- **Lineáris program megengedett tartománya:**

$$X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

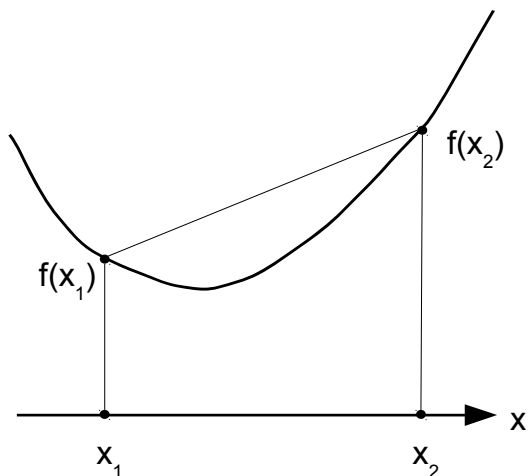
$$X = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

Konvex és konkáv függvények

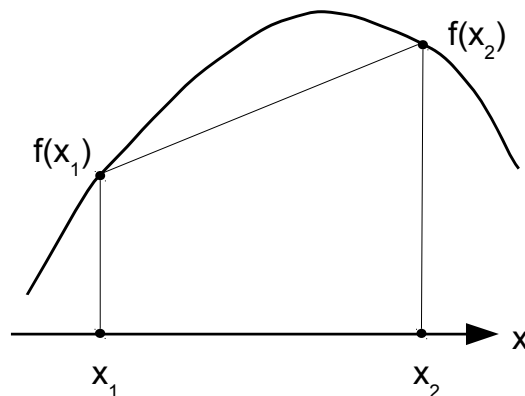
- Egy $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény **konvex** egy $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazon, ha minden $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ vektorra ($\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$)

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

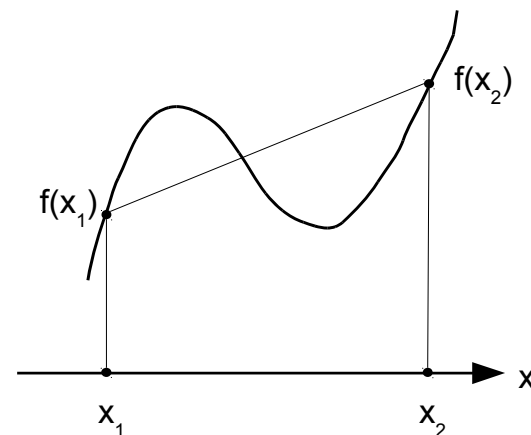
- Az $f(\mathbf{x}_1)$ és $f(\mathbf{x}_2)$ pontokat összekötő húr a függvény grafikonja fölött helyezkedik el
- f függvény **konkáv**, ha $(-f)$ konvex



(a) konvex



(b) konkáv



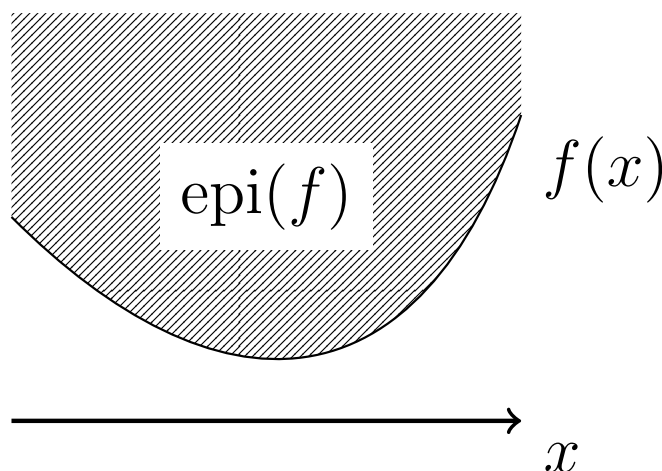
(c) egyik sem

Konvex és konkáv függvények

- Egy $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény grafikonja „fölötti” pontok halmaza az f **epigráfja**

$$\text{epi}(f) = \{(\boldsymbol{x}, y) : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, y \geq f(\boldsymbol{x})\}$$

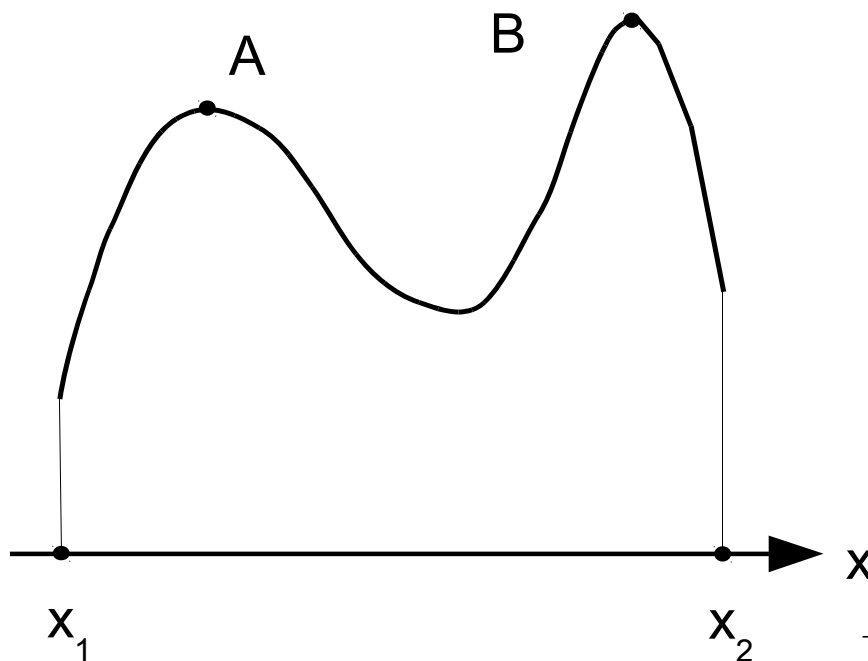
- Függvény konvexitásának ellenőrzése: f konvex az $\mathbb{R}^n$ halmazon akkor és csak akkor, ha az $\text{epi}(f)$ halmaz konvex



Optimalizálás konvex halmazon

- Legyen $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény és keressük az általános $\max f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X$ optimalizálási feladat megoldását
- $\bar{\mathbf{x}} \in X$ **globális optimum**, ha minden $\mathbf{x} \in X$ pontban $f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x})$
- $\bar{\mathbf{x}} \in X$ **lokális optimum**, ha létezik $\bar{\mathbf{x}}$ valamely $\epsilon > 0$ sugarú környezete $N_\epsilon(\bar{\mathbf{x}})$, hogy $\forall \mathbf{x} \in N_\epsilon(\bar{\mathbf{x}}) \cap X$: $f(\bar{\mathbf{x}}) \geq f(\mathbf{x})$

A pont lokális, B pont
globális maximum az $[x_1, x_2]$
tartományon



Optimalizálás konvex halmazon

- **Tétel:** Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konkáv függvény egy X konvex halmazon és $\bar{x} \in X$ lokális optimuma a $\max f(x) : x \in X$ optimalizálási feladatnak. Ekkor $\bar{x}$ globális optimum is
- **Biz.:** $\bar{x} \in X$ lokális optimum, ezért létezik $\epsilon > 0$ sugarú $N_\epsilon(\bar{x})$ környezete, hogy

$$\forall x \in N_\epsilon(\bar{x}) \cap X : f(\bar{x}) \geq f(x)$$

- Tegyük fel, hogy $\bar{x}$ nem globális optimum, és létezik $\hat{x} \in X : f(\hat{x}) > f(\bar{x})$
- Mivel X konvex, ezért $\hat{x}$ és $\bar{x}$ konvex kombinációit is tartalmazza (az $\hat{x}$ és $\bar{x}$ pontokat összekötő vonalszakaszt)
- Továbbá bármely $\epsilon > 0$ esetén $N_\epsilon(\bar{x})$ tartalmaz olyan $\bar{x}$ -től különböző pontokat, melyek előállnak mint $\hat{x}$ és $\bar{x}$ konvex kombinációi

Optimalizálás konvex halmazon

- Mivel f konkáv, ezért $\hat{x}$ és $\bar{x}$ pontokat összekötő vonalszakaszon levő minden $\bar{x}$ -től különböző ponthoz $f(\bar{x})$ -nél nagyobb függvényérték tartozik

$$\begin{aligned}\forall \lambda \in (0, 1] : f(\lambda \hat{x} + (1 - \lambda)\bar{x}) &\geq \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) > \\ &> \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x})\end{aligned}$$

- Tehát $\bar{x}$ minden környezete tartalmaz olyan x pontokat, melyekre $f(x) > f(\bar{x})$, ami ellentmond a feltevésnek, hogy $\bar{x}$ lokális maximum □
- **Következmény:** Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex függvény, X konvex halmaz és $\bar{x} \in X$ lokális optima a $\min f(x) : x \in X$ optimalizálási feladatnak. Ekkor $\bar{x}$ globális optimum is

A gradiens

- Adott $X \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz és $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Ekkor f **differenciálható** egy $\bar{x} \in X$ pontban, ha létezik $\nabla f(\bar{x})$ **gradiens vektor** és $\alpha : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ függvény, hogy $\forall x \in X$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) ,$$

$$\text{ahol } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) = 0$$

- Pontbeli linearizálás a függvényt az első rendű Taylor-sorral közelítve: $f(x) \approx f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$
- Ha f differenciálható, akkor a gradiens egyértelmű és előáll a parciális deriváltak vektoraként

$$\nabla f(x)^T = \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right]$$

A gradiens

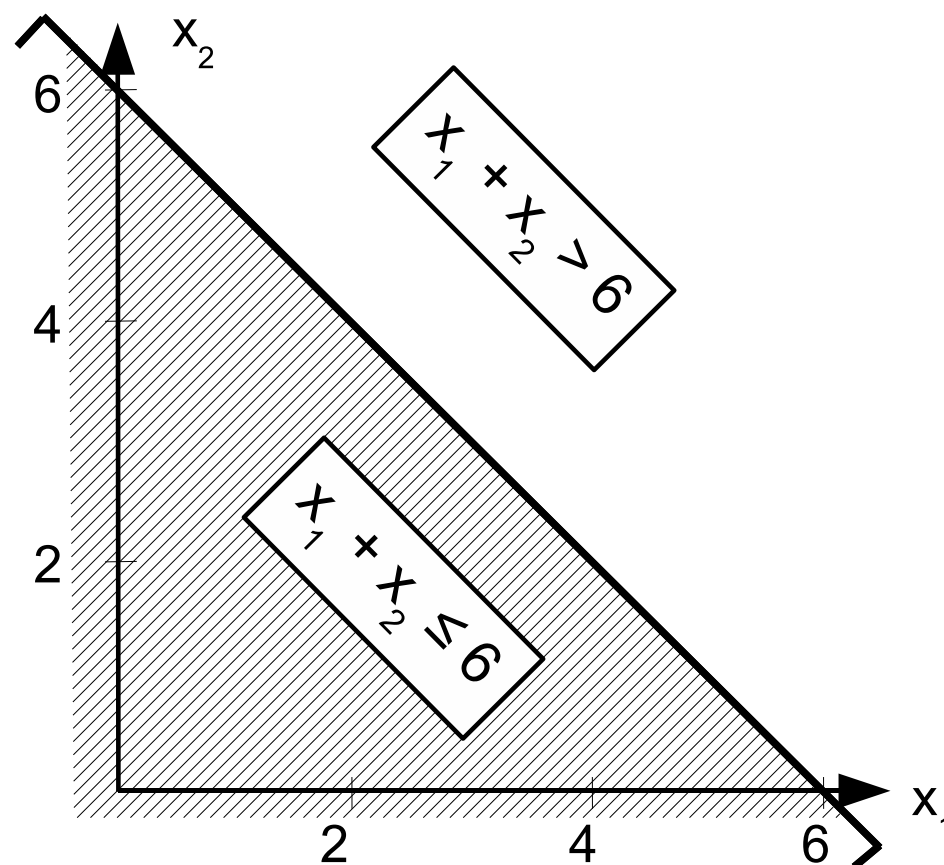
- A gradiens megmutatja a f függvény változását miközben $\bar{x}$ pontból Δx irányban elmozdulunk

$$f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x}) \approx \nabla f(\bar{x})^T \Delta x$$

- Tekintsük a $\Delta x : \|\Delta x\| = 1$ iránybeli $\nabla f(\bar{x})^T \Delta x$ deriváltat
- A skalárszorzat tulajdonságai miatt $\forall x, y, \|x\| = \|y\|$:
 $x^T x \geq x^T y$ (koszinusztétel), ezért
 - f leggyorsabban a $\Delta x = \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ irányban növekszik
 - f leggyorsabban a $\Delta x = -\frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}$ irányban csökken
- **Tétel:** ha $\bar{x}$ pont f függvény lokális minimuma vagy maximuma, akkor $\nabla f(\bar{x}) = 0$
- Fordítva nem igaz, mert $\bar{x}$ lehet inflexiós pont is

Hipersíkok és félterek

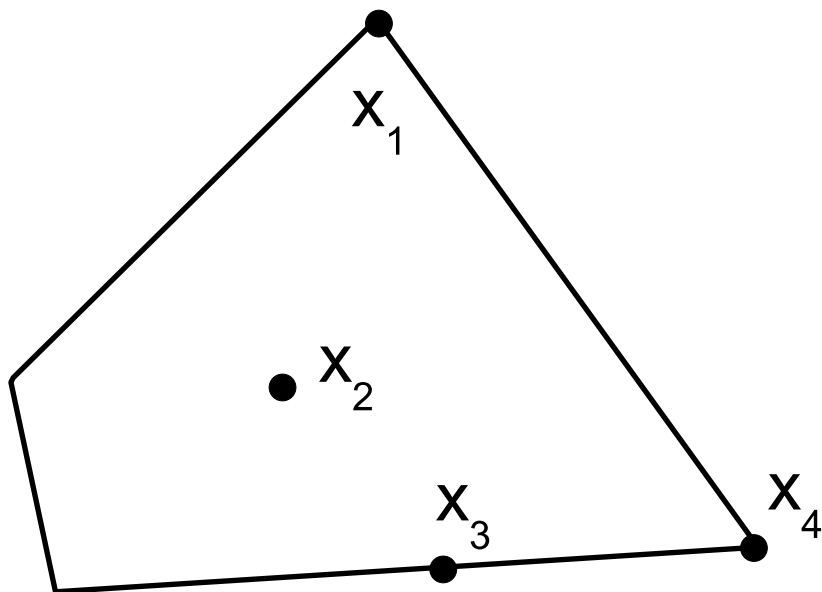
- **Hipersík:** azon x pontok halmaza, melyek kielégítik az $a^T x = b$ egyenletet
- Az a vektor a hipersík **normálvektora**
- Az $X = \{x : a^T x = b\}$ hipersík a teret két **féltérre** osztja
 - „alsó” féltér:
 $\{x : a^T x \leq b\}$
 - „felső” féltér:
 $\{x : a^T x > b\}$
- A hipersíkok és félterek konvex halmazok



Extrém pontok

- Egy konvex X halmaz $x \in X$ pontja X **extrém pontja**, ha nem állítható elő X két, x -től különböző pontjának konvex kombinációjaként:

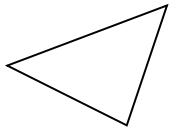
$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \text{ és } 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x$$



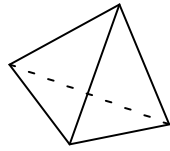
- x_1 és x_4 extrém pontok, x_2 és x_3 nem
- az extrém pontok a konvex halmaz „sarokpontjai”

Poliéderek

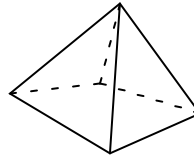
- Véges számú síklap által határolt test



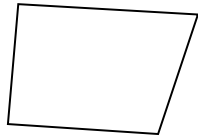
Triangle



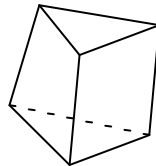
Tetrahedron



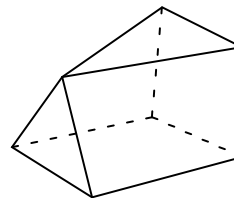
Pyramid



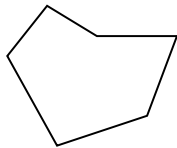
Quadrilateral



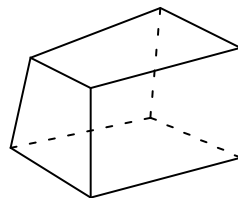
Prism



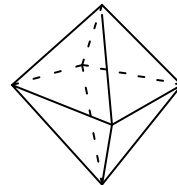
Septahedron



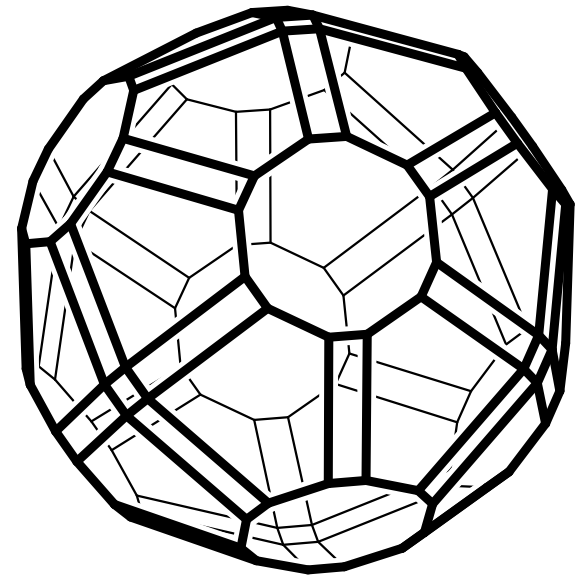
Polygon



Hexahedron



Polyhedron



- A „poliéder” fogalom alatt általában a „konvex poliédereket” értjük

Konvex poliéderek

- **1. definíció:** véges számú féltér metszete

$$X = \{x : a_i x \leq b_i, i \in \{1, \dots, m\}\} = \{x : Ax \leq b\}$$

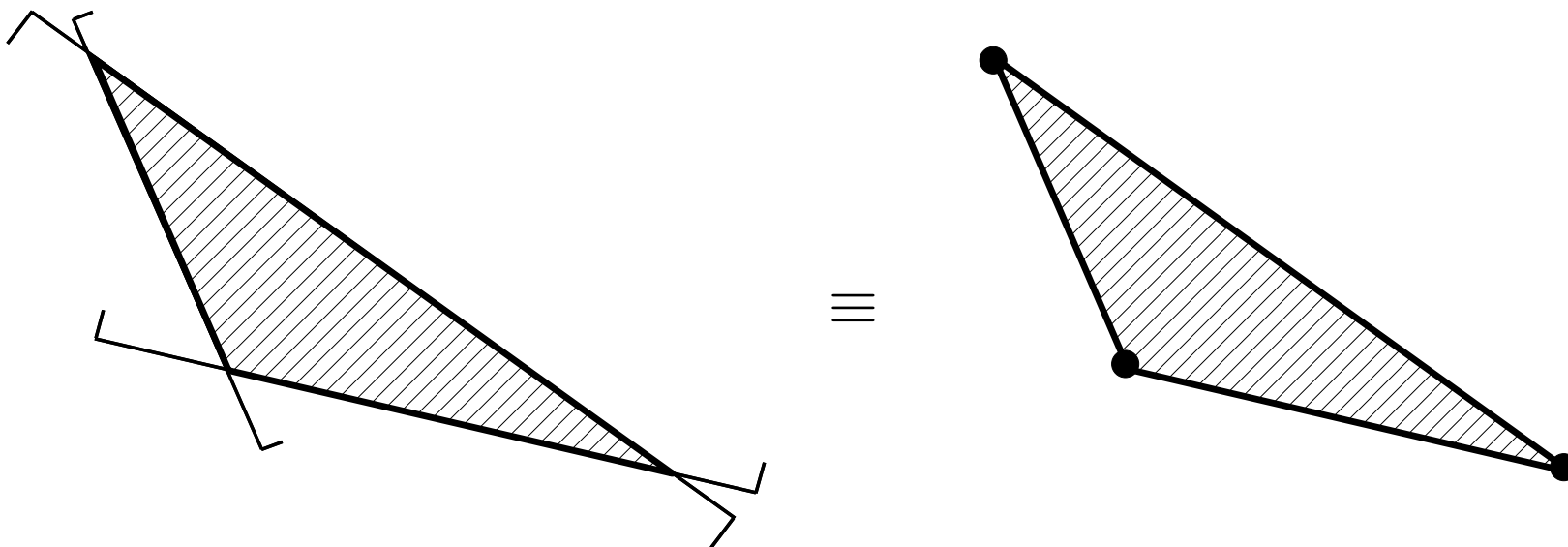
- **Következmény:** egy lineáris program megengedett megoldásainak halmaza mindig konvex poliédert alkot
 - kanonikus alak: $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$
 - standard alak: $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$
- **2. definíció:** véges számú pont konvex kombinációja

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \geq 0 \right\}$$

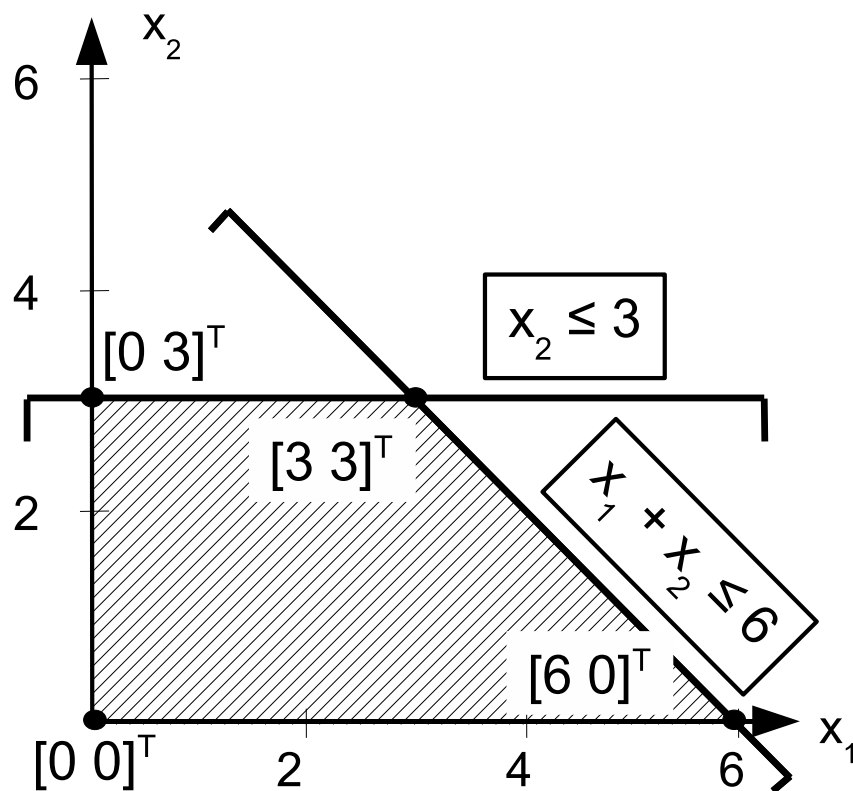
A Minkowski-Weyl tétel

- Korlátos poliéderek reprezentációs tétele: a két definíció egyenértékű
- **Minkowski-Weyl erős tétele:** ha véges számú féltér metszete korlátos halmaz, akkor az felírható véges számú extrém pont konvex kombinációjaként

$$\{x : Ax \leq b\} \Leftrightarrow \text{conv}\{x_j : 1 \leq j \leq k\}$$



A Minkowski-Weyl tétel: példa



Extrém pontok:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Félterek metszete:

$$X = \left\{ x_1, x_2 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- Extrém pontok konvex kombinációja:

$$X = \text{conv} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Lineáris programok és extrém pontok

- **Tétel:** ha egy lineáris program megengedett megoldásainak halmaza korlátos, akkor az optimális megoldás előáll a megengedett tartomány valamely extrém pontján
- **Biz.:** adva az alábbi lineáris program

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

- Egyéni ízlés szerint átírható a $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}'\mathbf{x} \leq \mathbf{b}'\}$ alakra

$$\begin{array}{ll}\max & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ & -\mathbf{Ax} \leq -\mathbf{b} \\ & -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\end{array}$$

Lineáris programok és extrém pontok

- A lineáris program $X = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$ megengedett tartománya poliéder
- Most tegyük fel, hogy X korlátos, és legyenek X extrém pontjai sorra $x_1, x_2, \dots, x_k$
- Minkowski-Weyl erős tétele miatt X felírható az extrém pontjainak konvex kombinációjaként

$$\forall x \in X : \quad x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0$$

Lineáris programok és extrém pontok

- Helyettesítsük x -et a lineáris programba
- A feltételeket x automatikusan teljesíti
- A célfüggvény: $\max \mathbf{c}^T (\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j) = \max \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j) \lambda_j$
- Egy másik lineáris programot kaptunk, melyben λ_j -k a változók

$$\max \sum_{j=1}^k (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j) \lambda_j$$

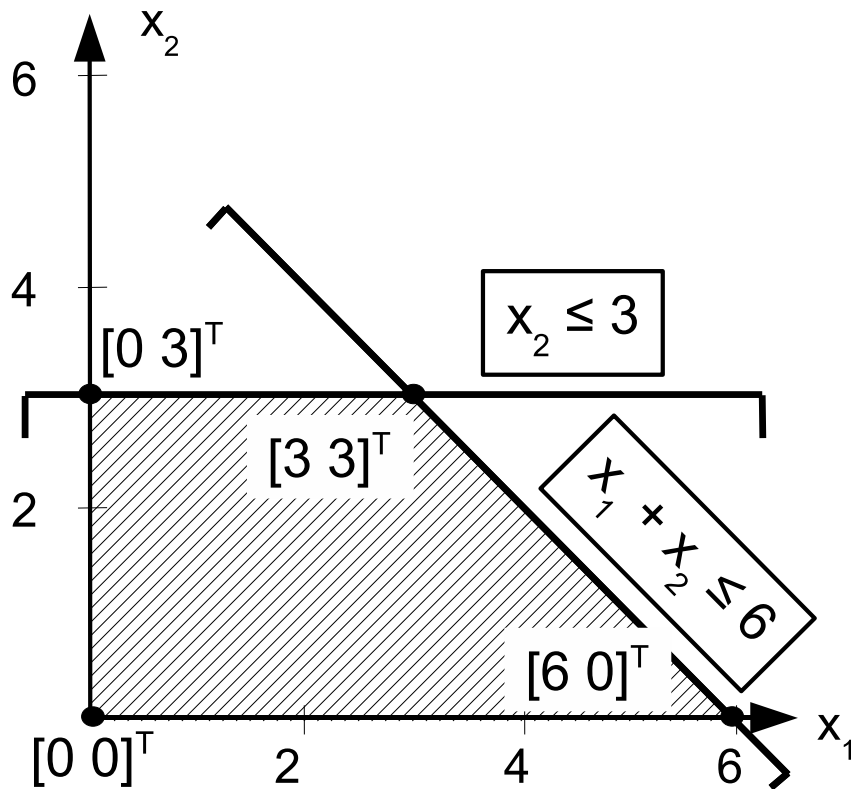
$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$$

Lineáris programok és extrém pontok

- Célunk tehát a $\sum_{j=1}^k (\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j) \lambda_j : \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$ lineáris program maximalizálása
- Könnyen belátható, hogy ekkor elég kiválasztanunk azt az extrém pontot, amelyre $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_j$ maximális. Legyen ez az extrém pont $\mathbf{x}_p$. Ekkor a $\lambda_p = 1, \lambda_j = 0 : j \neq p$ választás megoldja a lineáris programot, és az optimum értéke $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_p$. □
- Csak a korlátos esetre bizonyítottunk, de nemkorlátos megengedett tartományú lineáris programokra is érvényes a tétel
- A lineáris program általában nem írható fel az extrém pontok szerinti formában (amelyben könnyű megoldani), mert gyakran exponenciális számú extrém pont van

Extrém pontok: példa



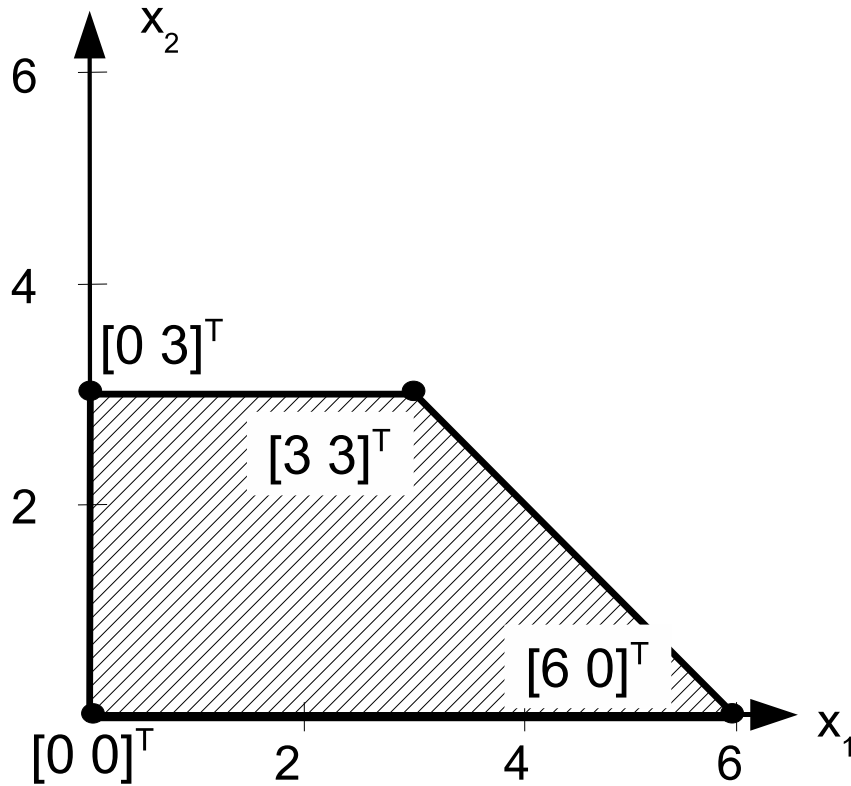
$$\begin{array}{llll} \max & x_1 & + & 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 \leq 6 \\ & & & x_2 \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

- Extrém pontok:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Extrém pontok: példa

- Készítsük el a $c^T x_j$ szorzatokat



$$c^T x_1 = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$c^T x_2 = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 6$$

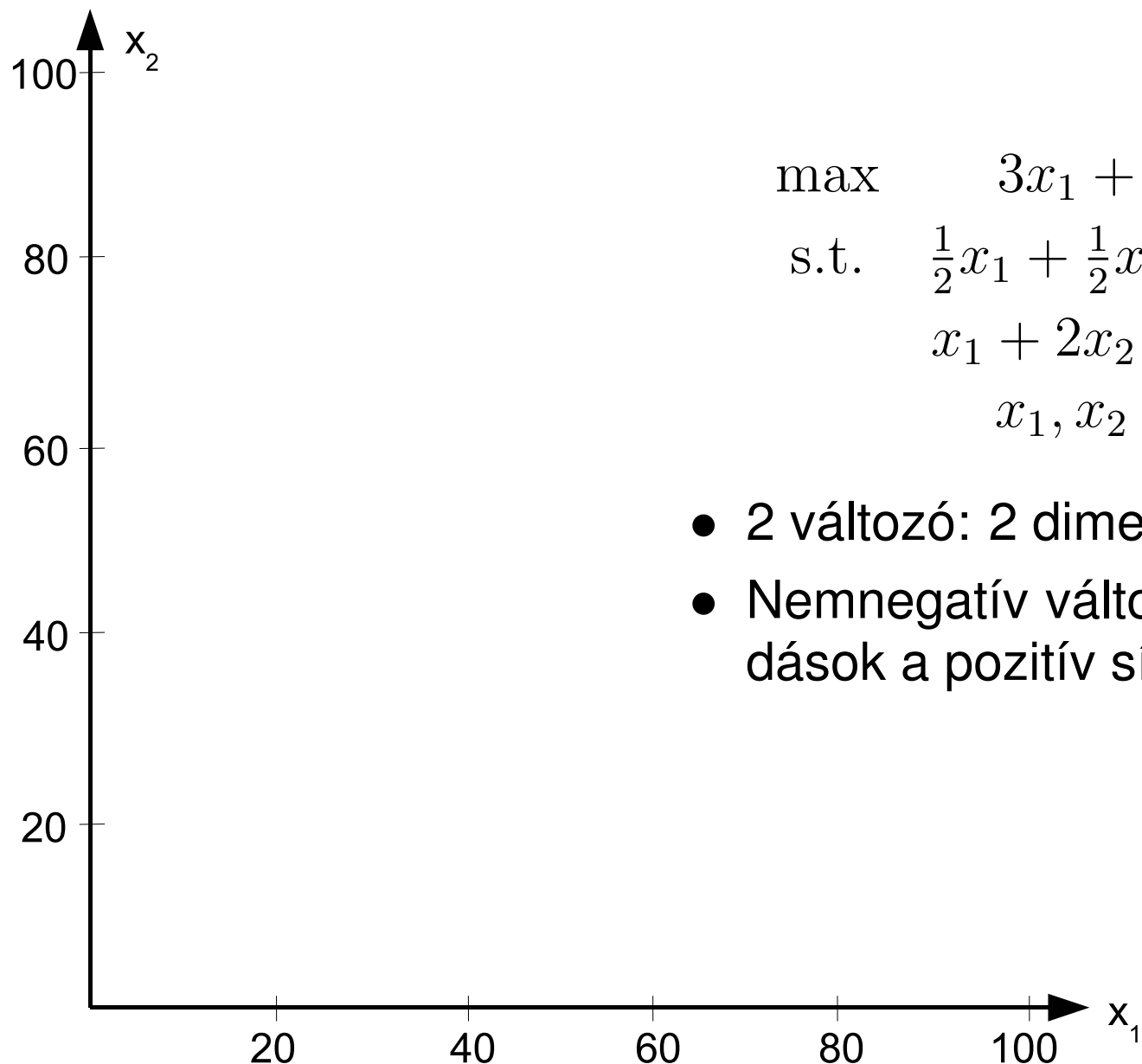
$$c^T x_3 = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \boxed{9}$$

$$c^T x_4 = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = 6$$

Termelésoptimalizálás – újra

- **Feladat:** egy papírgyár kétfajta papírt gyárt: standard és deluxe kivitel
 - mindkét típus 1 m²-éhez egyaránt $\frac{1}{2}$ m³ fa kell
 - a standard papír 1 m²-ének elkészítéséhez 1, a deluxe kivitel elkészítéséhez 2 munkaóra szükséges
 - minden héten 40 m³ fa és 100 munkaóra áll rendelkezésre
 - a standard kivitelű papír 1 m²-én 3 ezer, a deluxe kivitelűn 4 ezer forint haszon van
- **Kérdés:** mennyi standard és mennyi deluxe papírt gyártson a papírgyár a profit maximalizálásához?

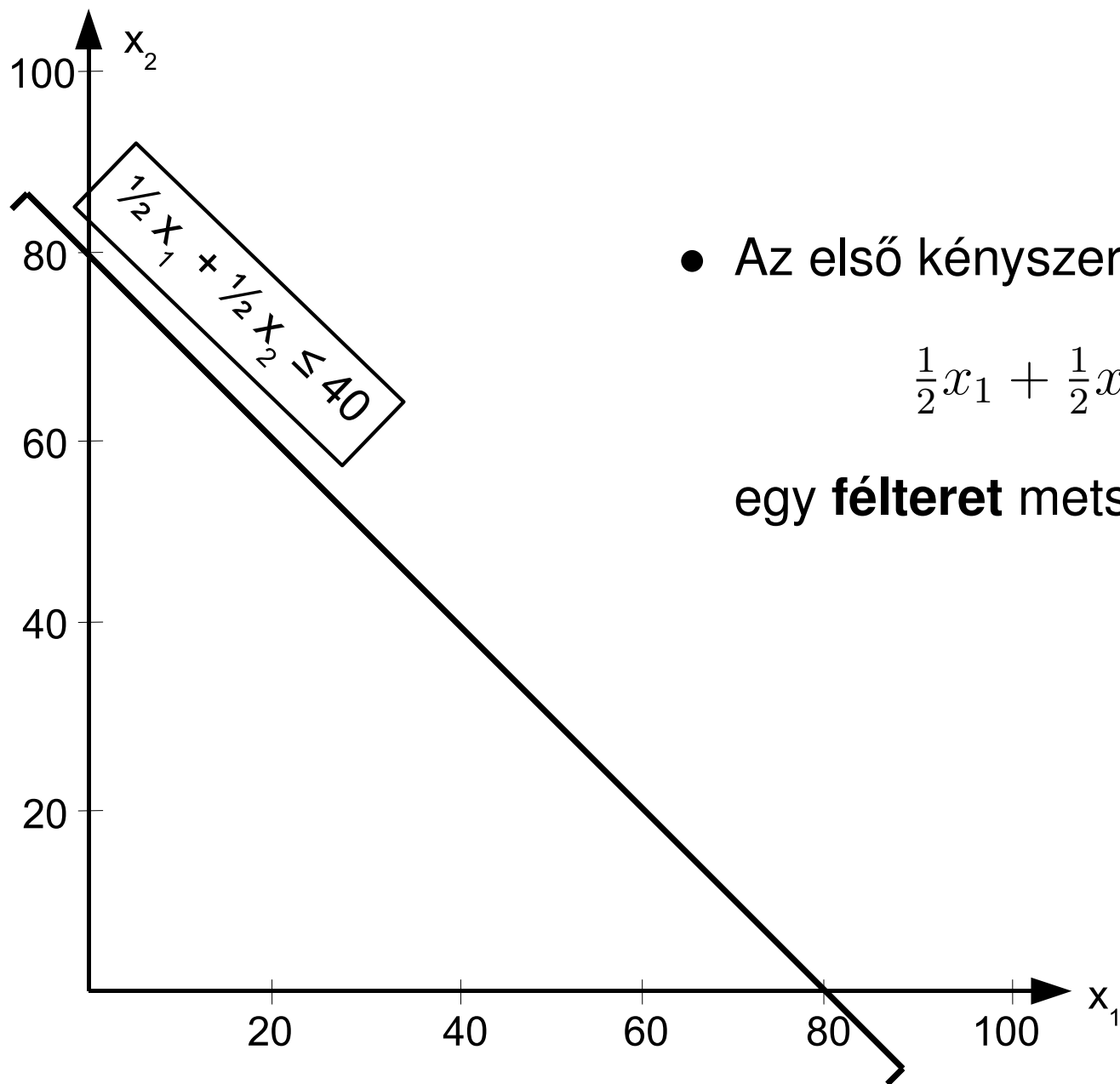
Termelés optimalizálás: megoldás



$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- 2 változó: 2 dimenziós tér
- Nemnegatív változók: a megoldások a pozitív síknegyedben

Termelés optimalizálás: megoldás

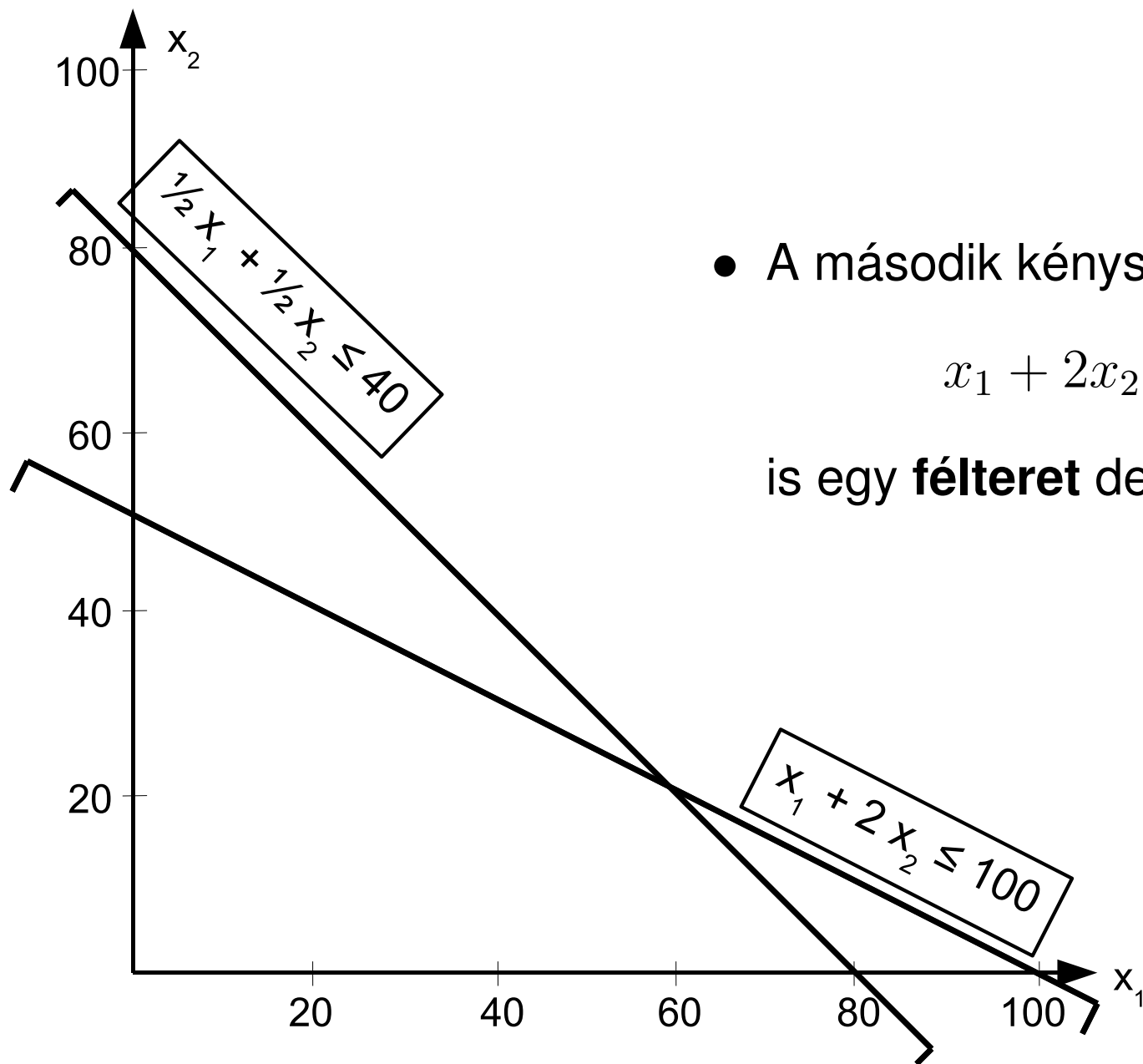


- Az első kényszerfeltétel

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 40$$

egy **félteret** metsz ki a síkból

Termelés optimalizálás: megoldás

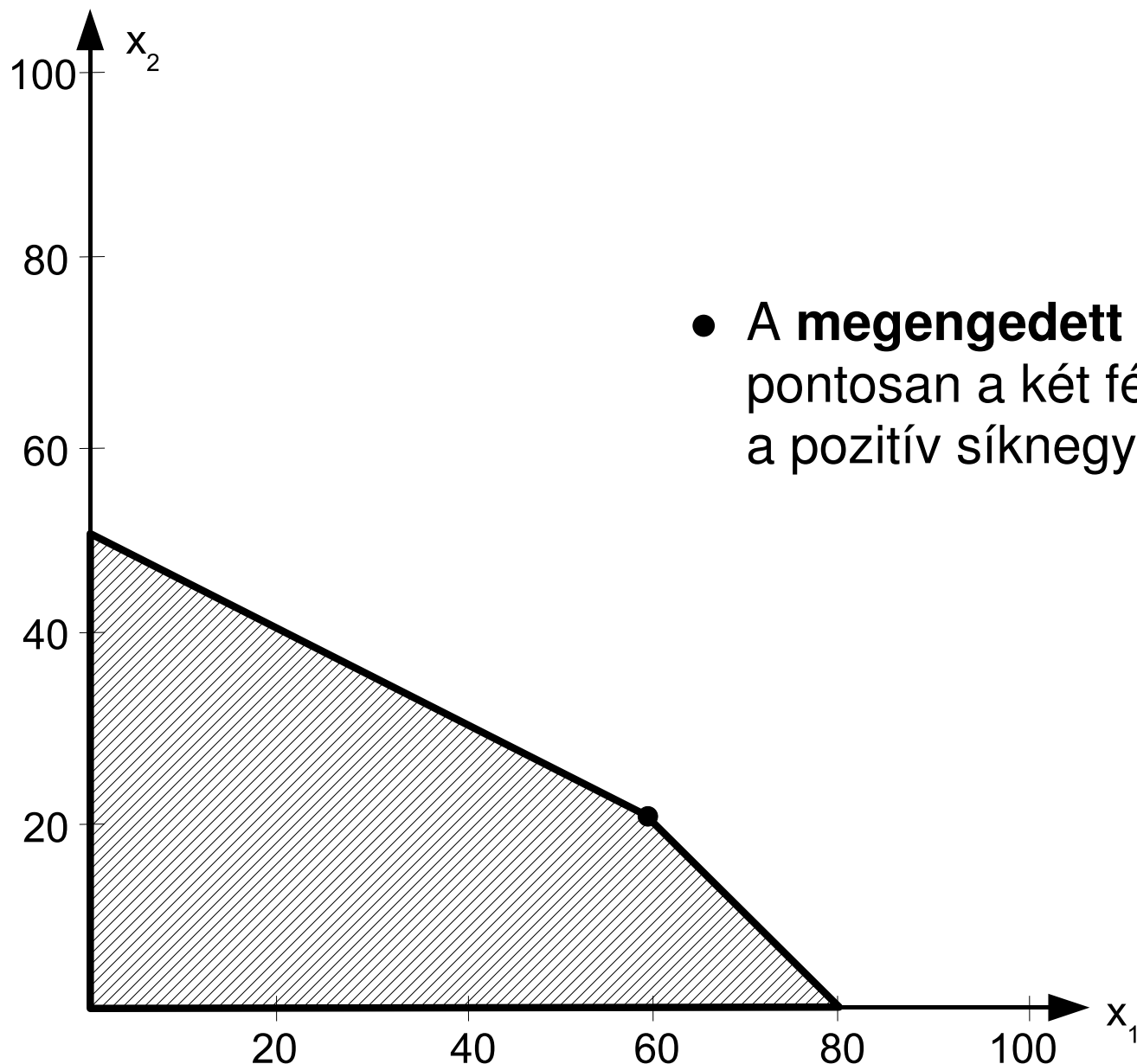


- A második kényszerfeltétel

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

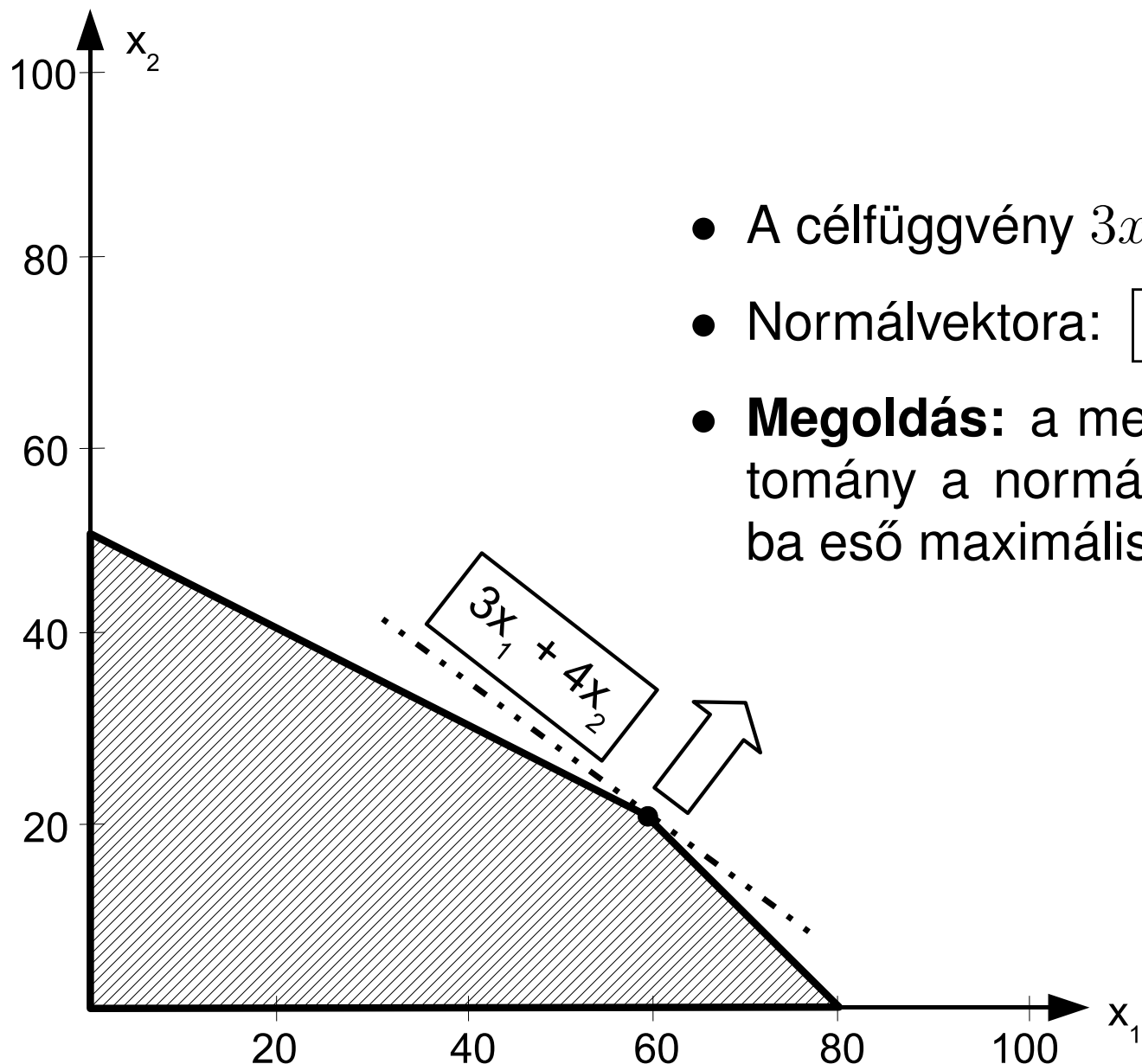
is egy **félteret** definiál

Termelés optimalizálás: megoldás



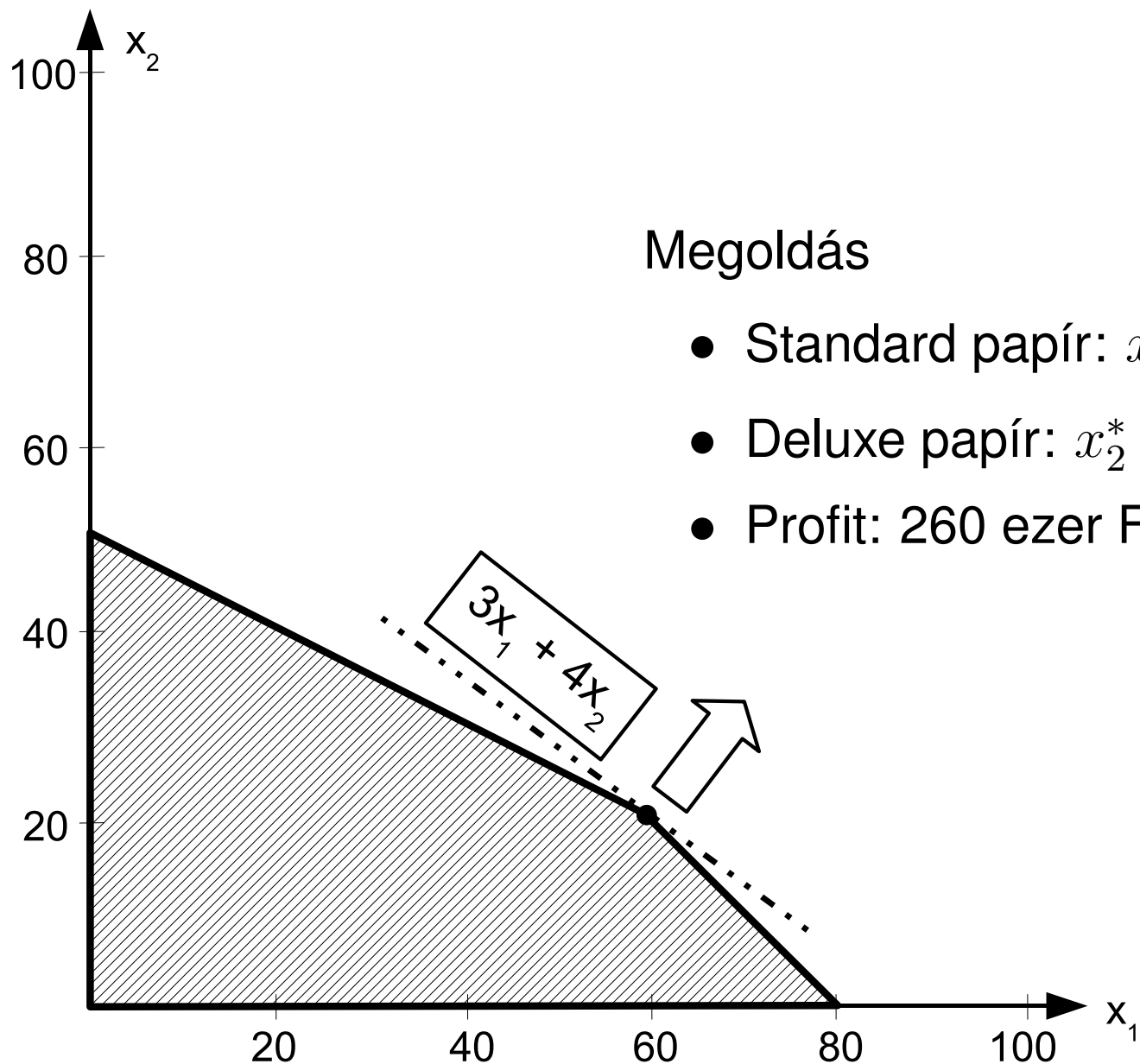
- A megengedett tartomány pontosan a két féltér metszete a pozitív síknegyedben

Termelésoptimalizálás: megoldás



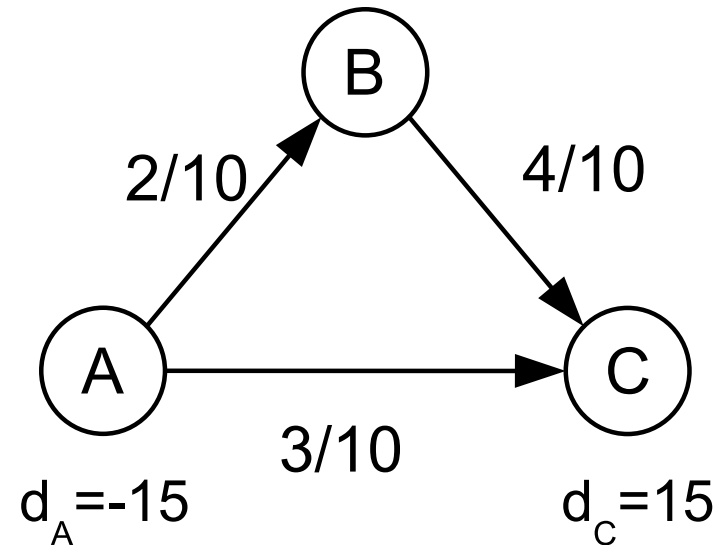
- A célfüggvény $3x_1 + 4x_2$
- Normálvektora: $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$
- **Megoldás:** a megengedett tartomány a normálvektor irányába eső maximális pontja

Termelés optimalizálás: megoldás



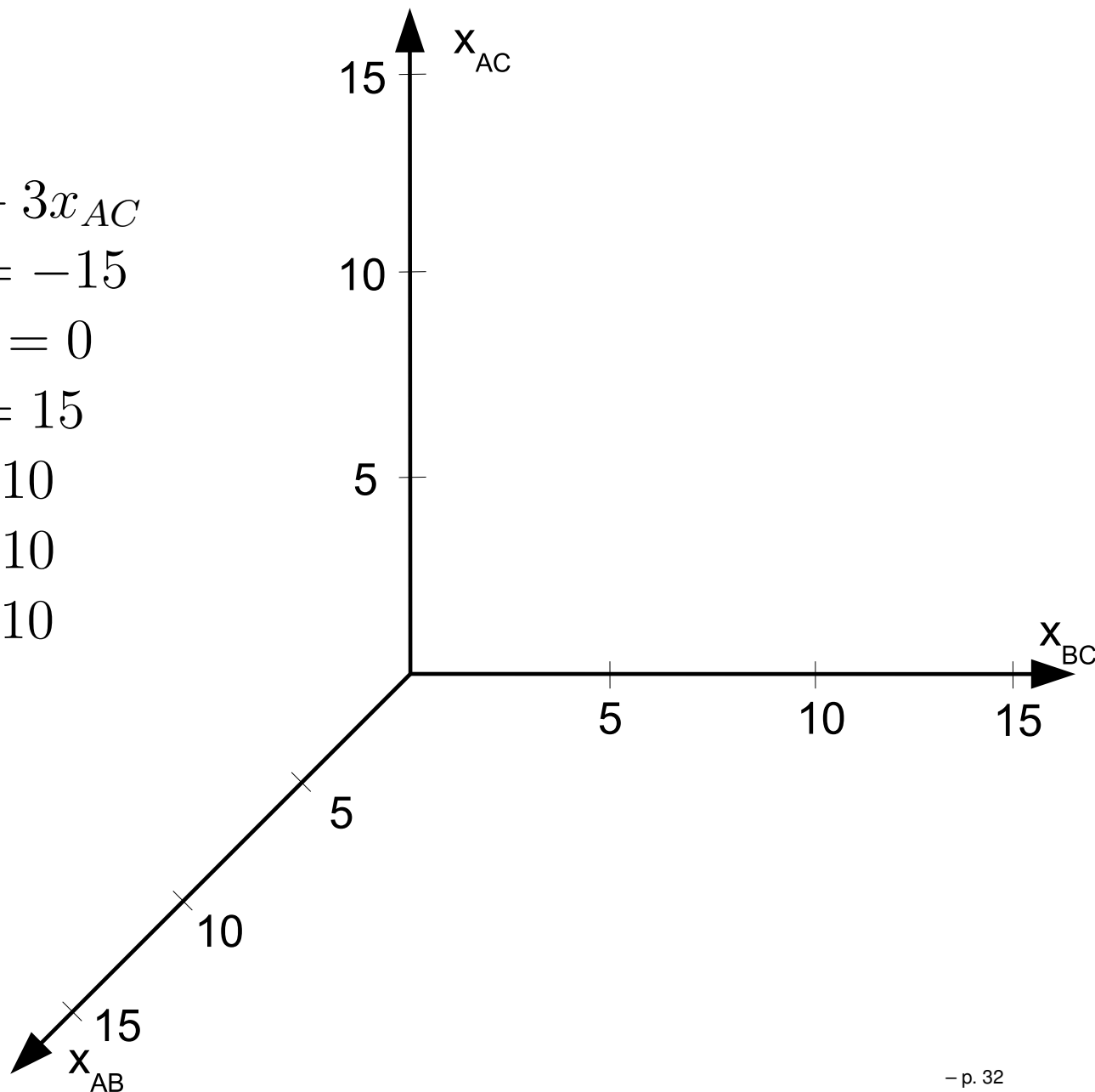
Logisztikai probléma

- Szállítmányozási vállalat:
 - A és C pontok között
 - 15 t áru
 - minden összeköttetés kapacitása 10 t
 - költség ([Ft]): $c_{AB} = 2$,
 $c_{BC} = 4$, $c_{AC} = 3$
 - cél: minimális költség



Logisztikai probléma: megoldás

$$\begin{array}{ll}\min & 2x_{AB} + 4x_{BC} + 3x_{AC} \\ \text{s.t.} & -x_{AB} - x_{AC} = -15 \\ & -x_{AB} + x_{BC} = 0 \\ & x_{BC} + x_{AC} = 15 \\ & 0 \leq x_{AB} \leq 10 \\ & 0 \leq x_{BC} \leq 10 \\ & 0 \leq x_{AC} \leq 10\end{array}$$

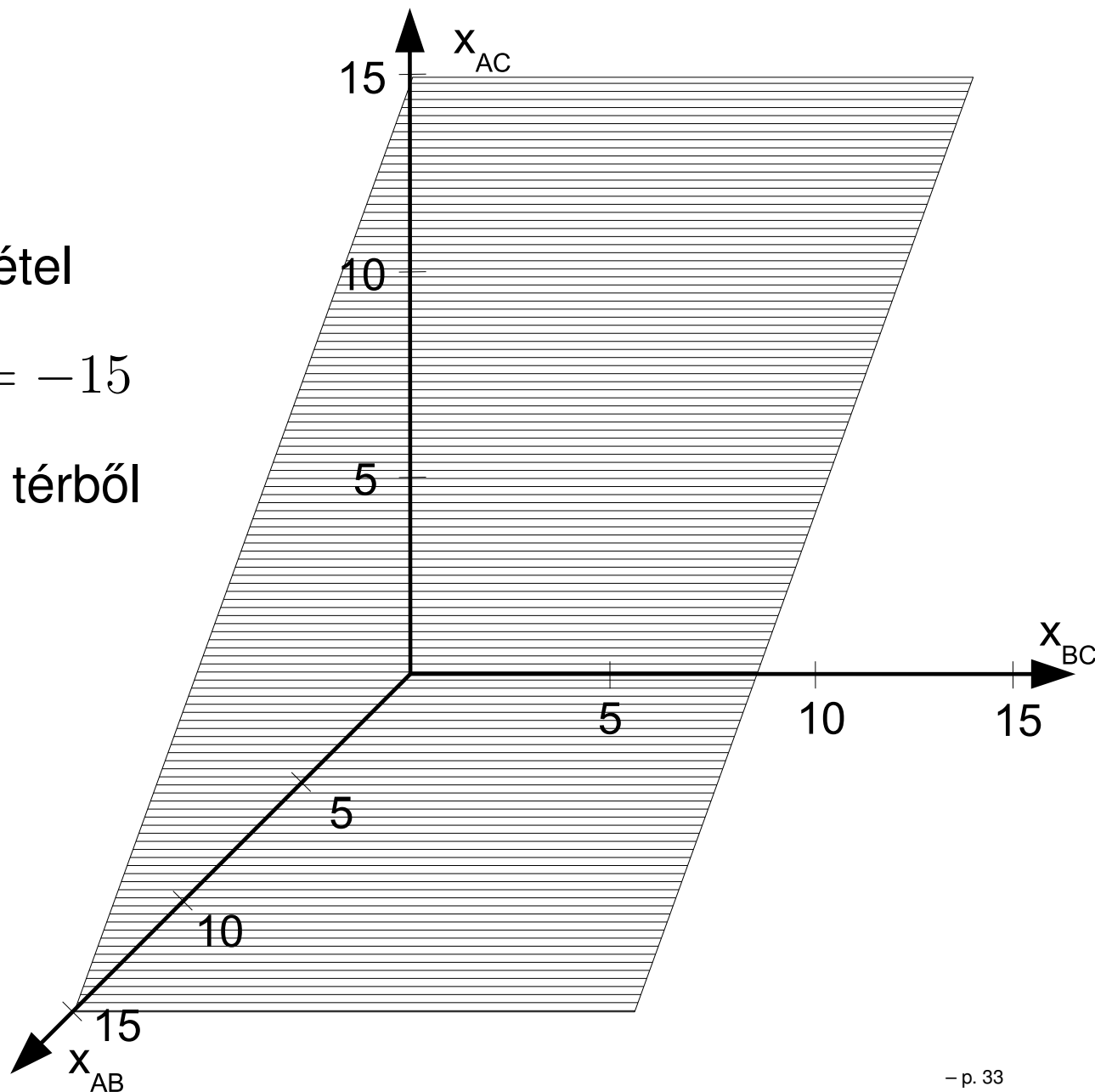


Logisztikai probléma: megoldás

- Az első kényszerfeltétel

$$-x_{AB} - x_{AC} = -15$$

egy **síkot** metsz ki a térből

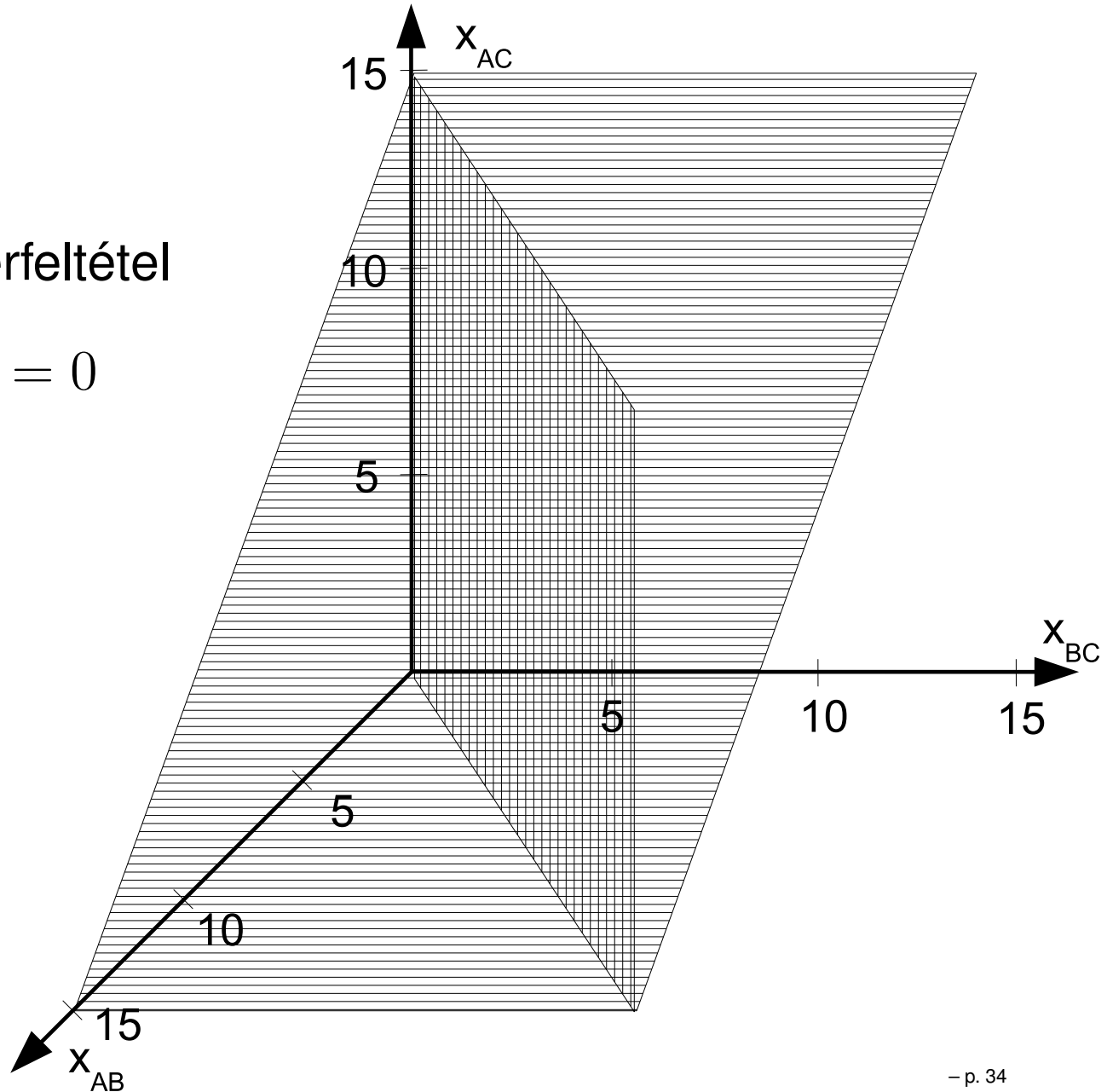


Logisztikai probléma: megoldás

- Az második kényszerfeltétel

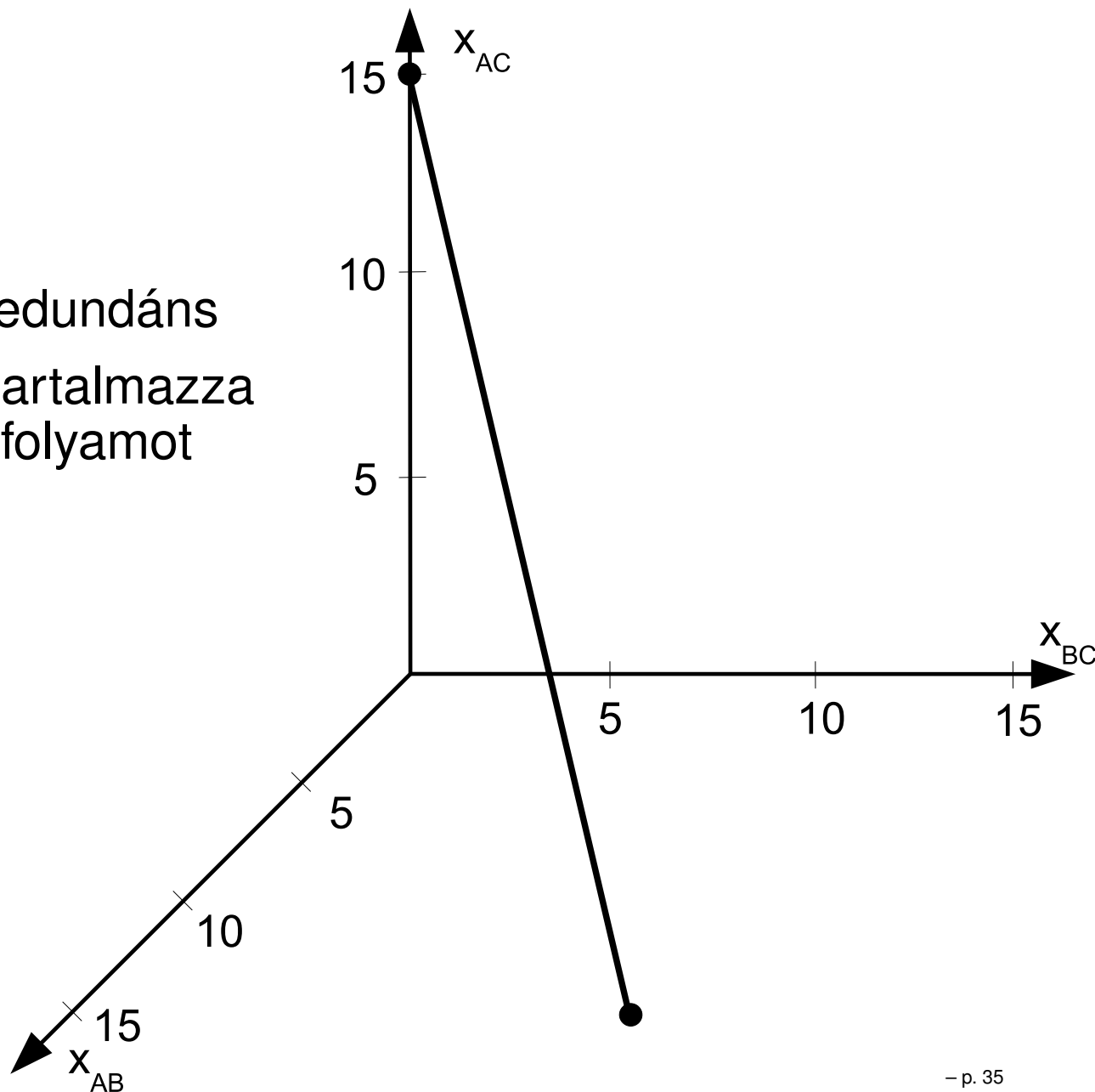
$$-x_{AB} + x_{BC} = 0$$

is egy **síkot** definiál



Logisztikai probléma: megoldás

- A harmadik feltétel redundáns
- A két sík metszete tartalmazza az összes érvényes folyamatot



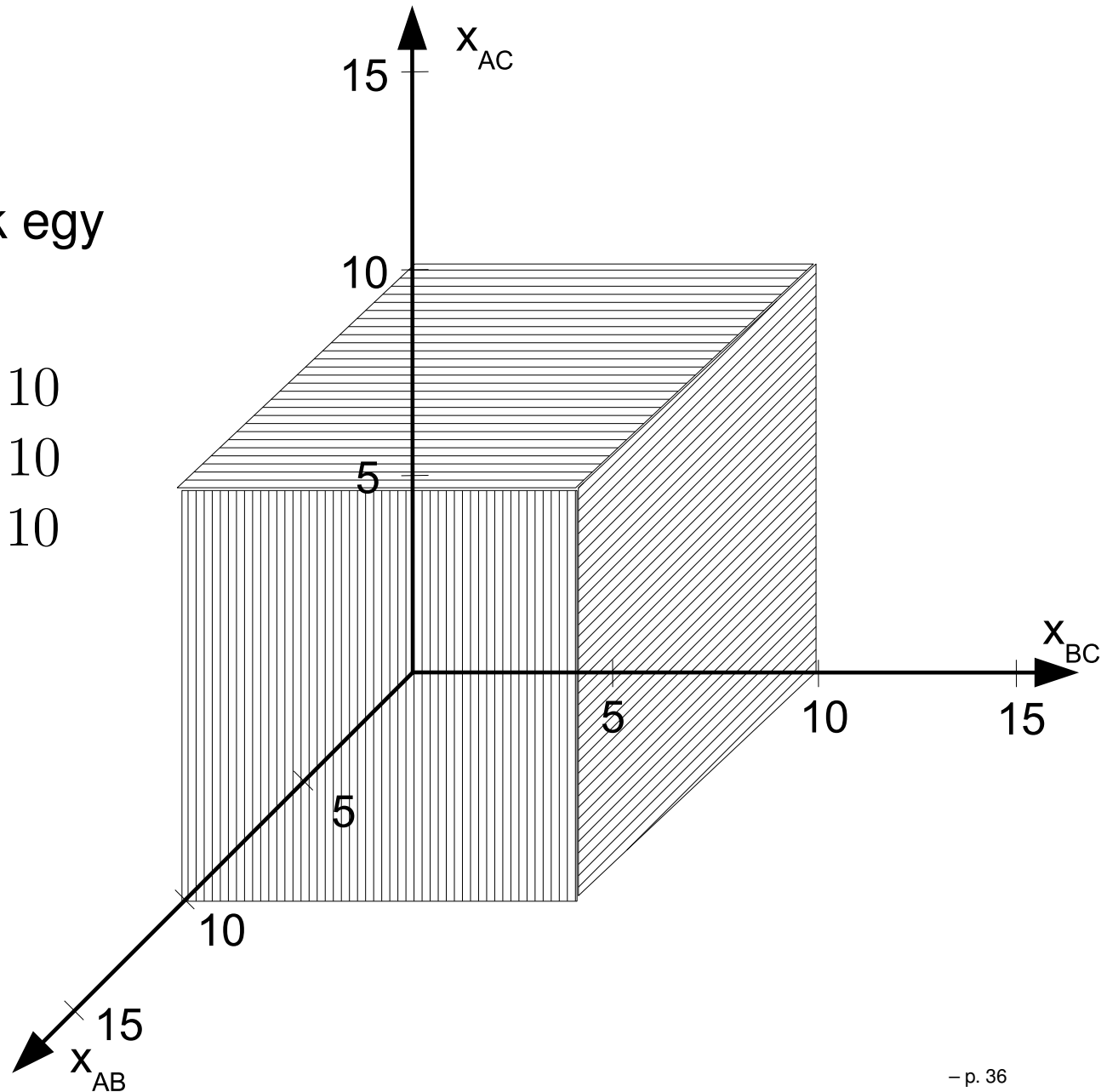
Logisztikai probléma: megoldás

- A kapacitásfeltételek egy hasábot definiálnak

$$0 \leq x_{AB} \leq 10$$

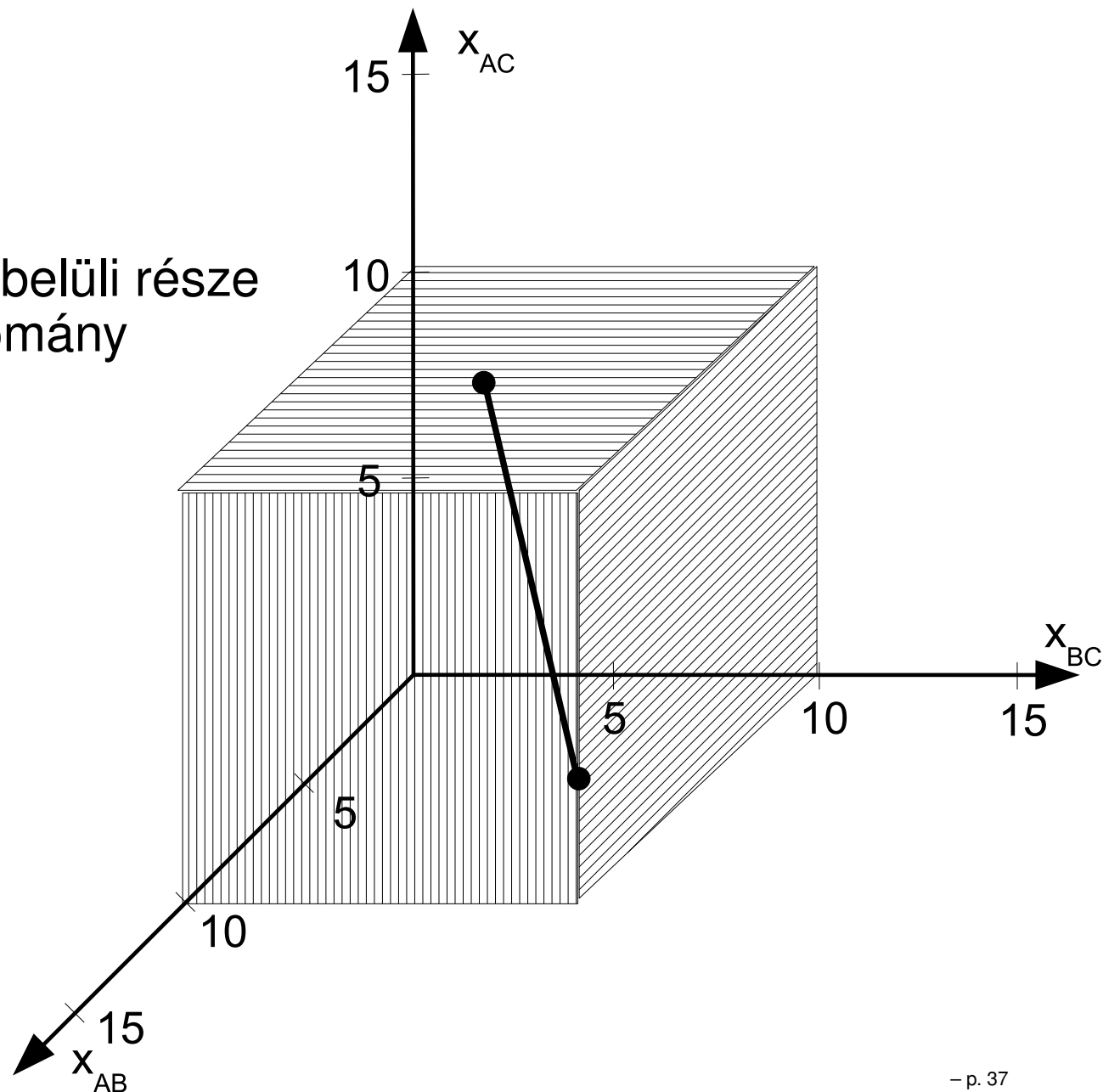
$$0 \leq x_{BC} \leq 10$$

$$0 \leq x_{AC} \leq 10$$



Logisztikai probléma: megoldás

- A szakasz hasábon belüli része a megengedett tartomány



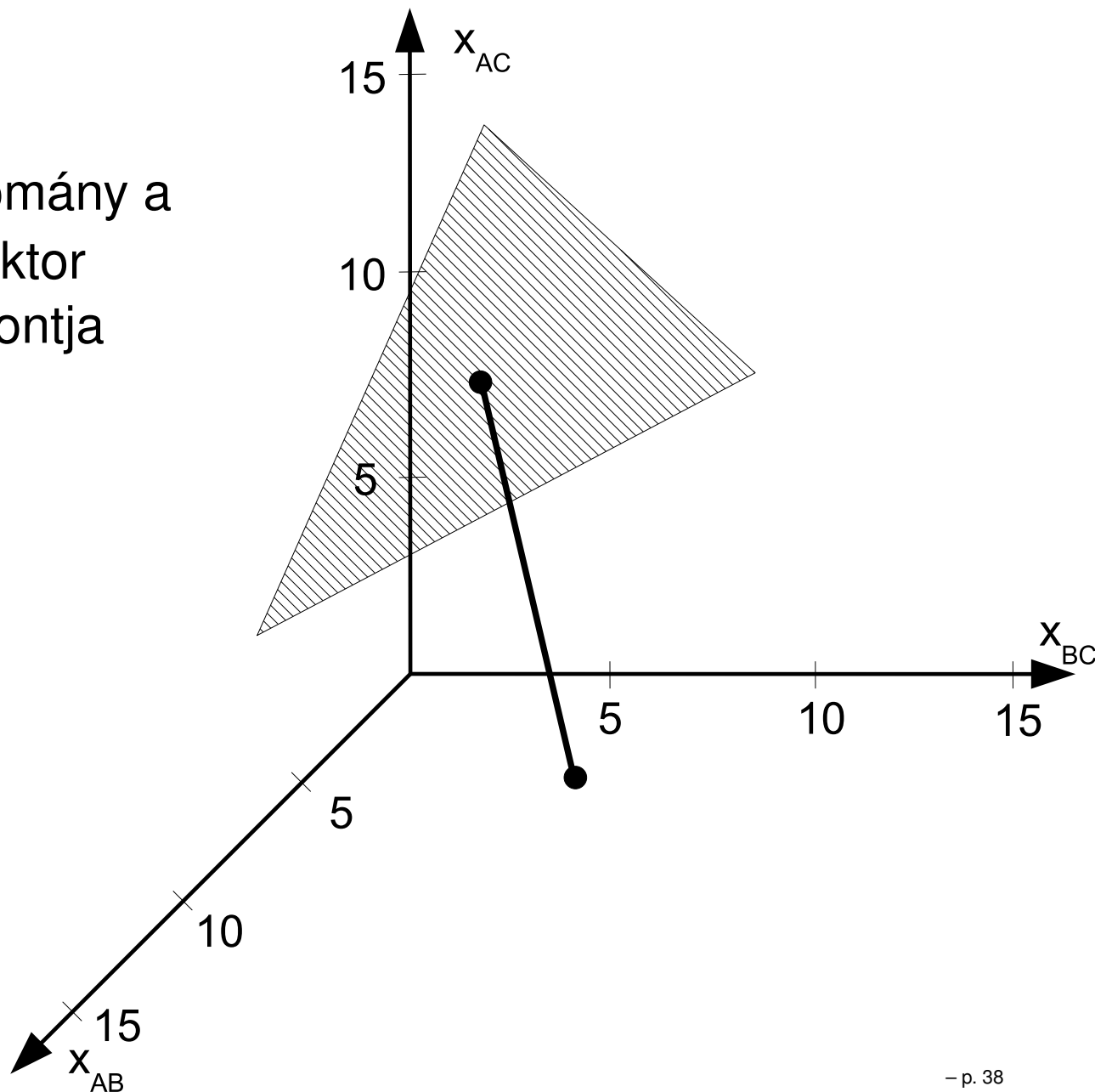
Logisztikai probléma: megoldás

- A megengedett tartomány a $[2 \ 4 \ 3]^T$ normálvektor szerinti **minimális** pontja

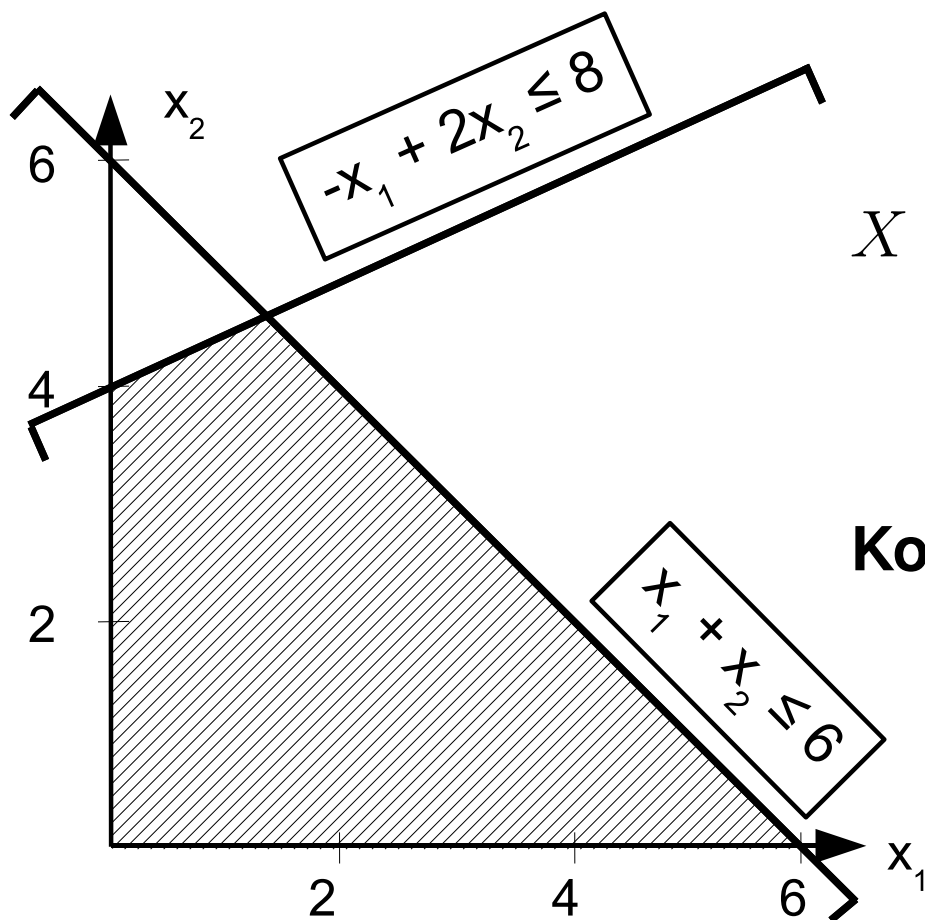
$$x_{AB} = 5$$

$$x_{BC} = 5$$

$$x_{AC} = 10$$



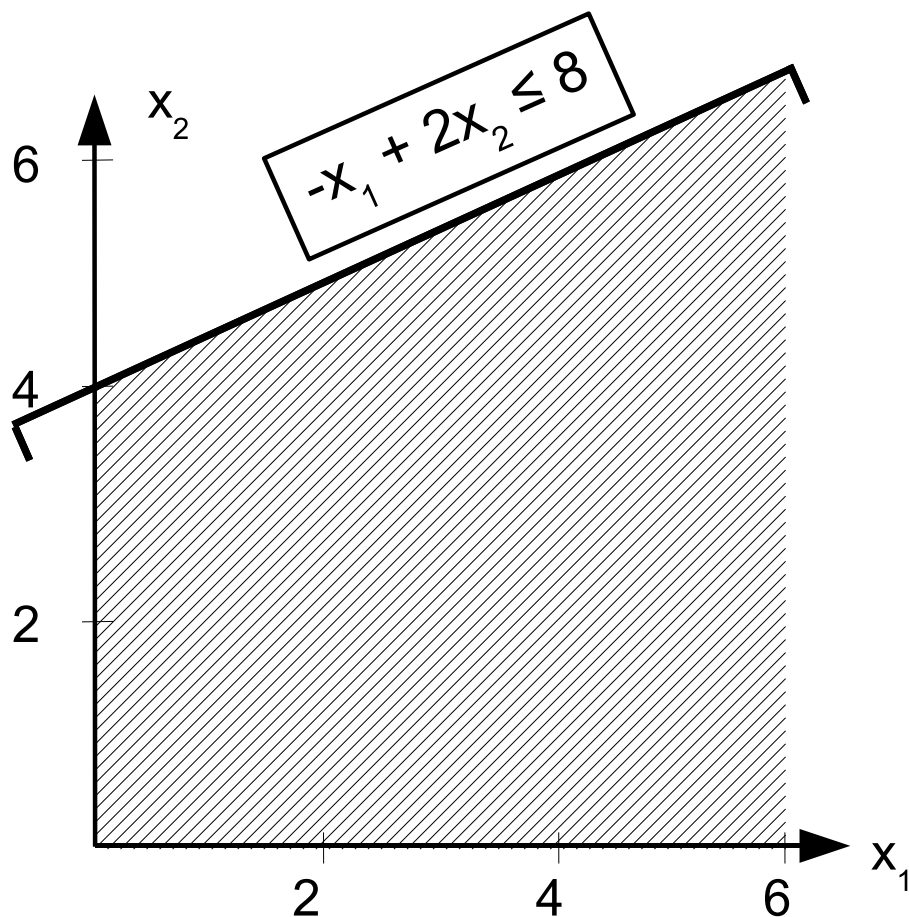
Megengedett tartomány



$$X = \{[x_1, x_2] : \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\}$$

Korlátos: található olyan origó középpontú véges (hiper-) gömb, mely az egész tartományt magába foglalja

Megengedett tartomány

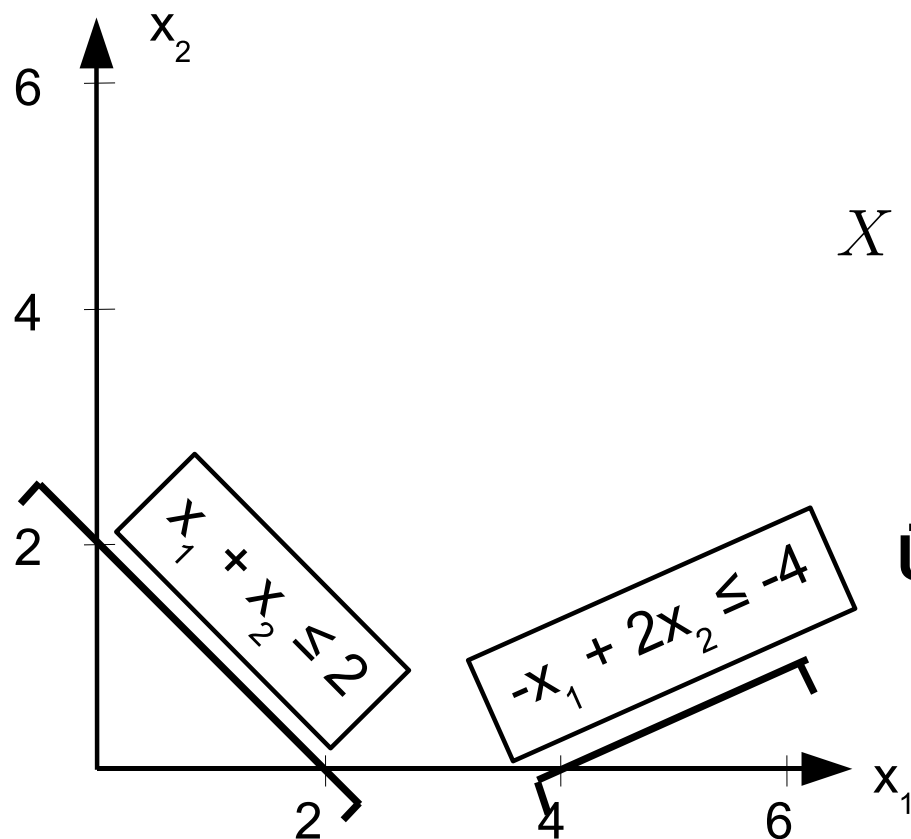


$$X = \{[x_1, x_2] : \begin{aligned} &-x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}\}$$

Nemkorlátos: található olyan $x \in X$ pont és olyan d irány, hogy az x -ből d irányba eső összes pont a tartományon belüli:

$$\forall \lambda > 0 : x + \lambda d \in X$$

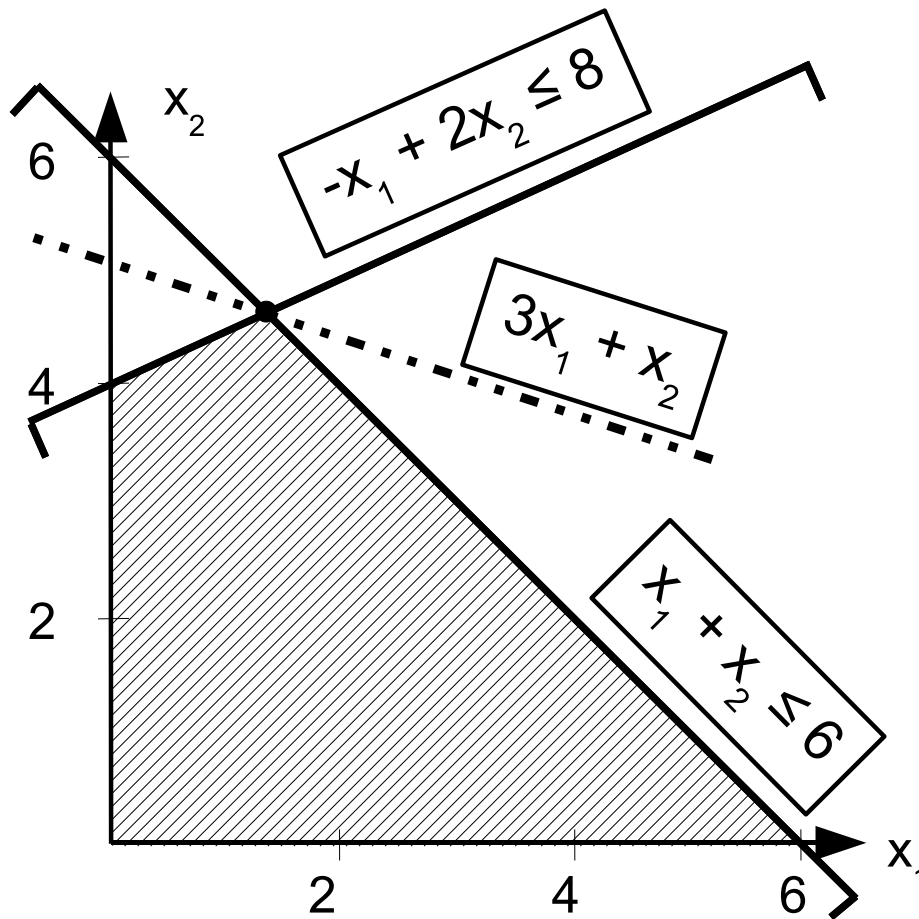
Megengedett tartomány



$$X = \{[x_1, x_2] : \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\}$$

Üres: a félterek metszete az üres halmaz

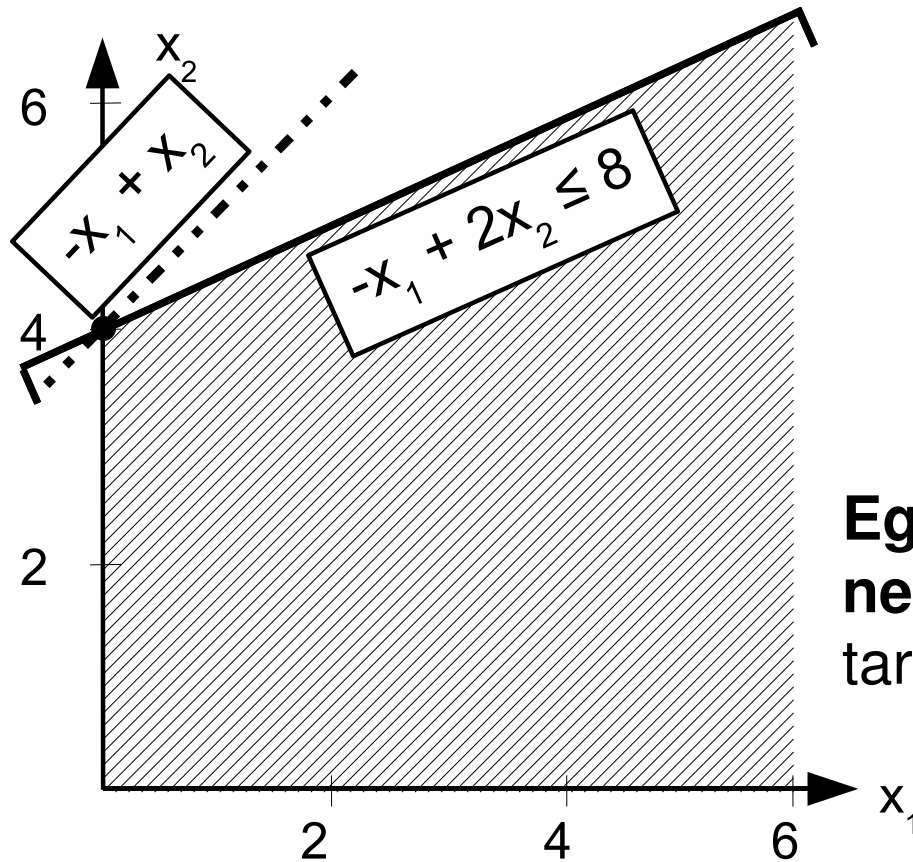
Optimális megoldás



$$\begin{array}{ll}\max & 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Egyedi optimális megoldás
korlátos megengedett
tartományon: a célfüggvény
a maximumát egyetlen
pontban éri el

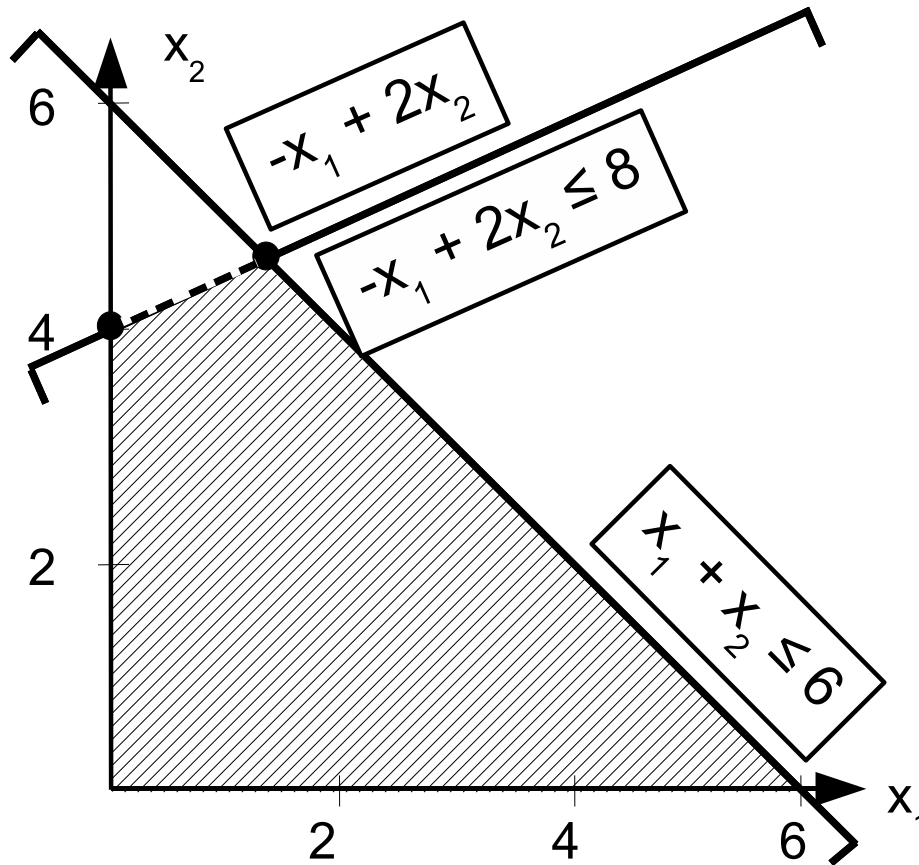
Optimális megoldás



$$\begin{array}{ll}\max & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Egyedi optimális megoldás
nemkorlátos megengedett
tartományon

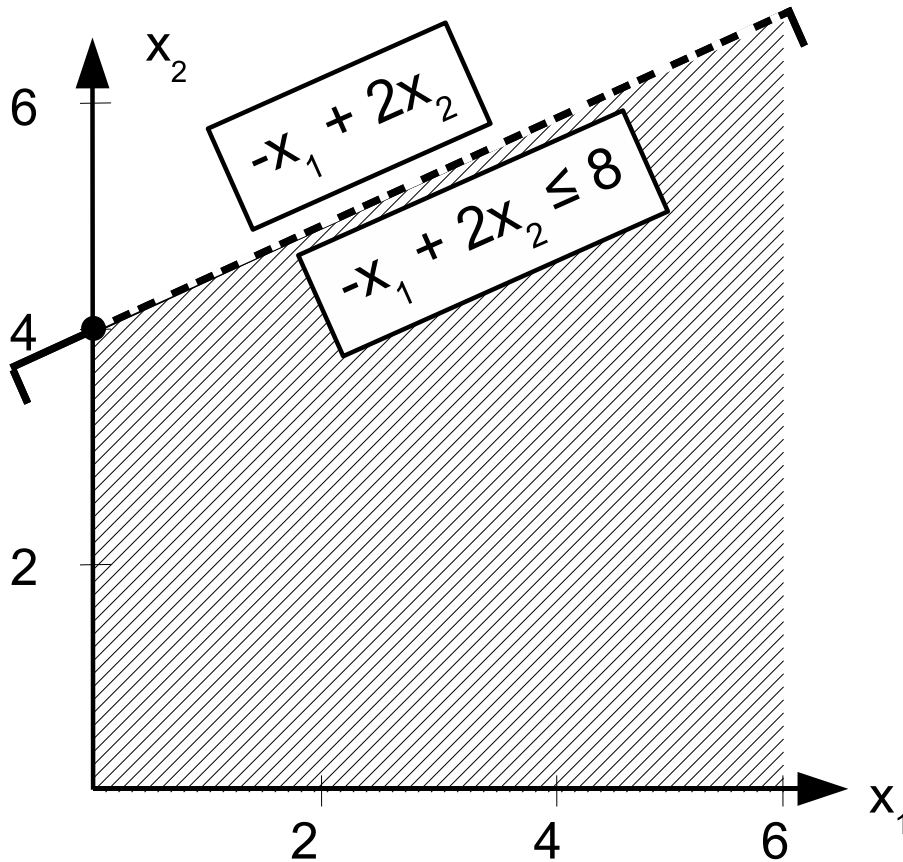
Optimális megoldás



$$\begin{array}{ll}\max & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Alternatív optimális
megoldások **korlátos**
megengedett tartományon: a
célfüggvény a maximális
értékét több ponton is
felveszi

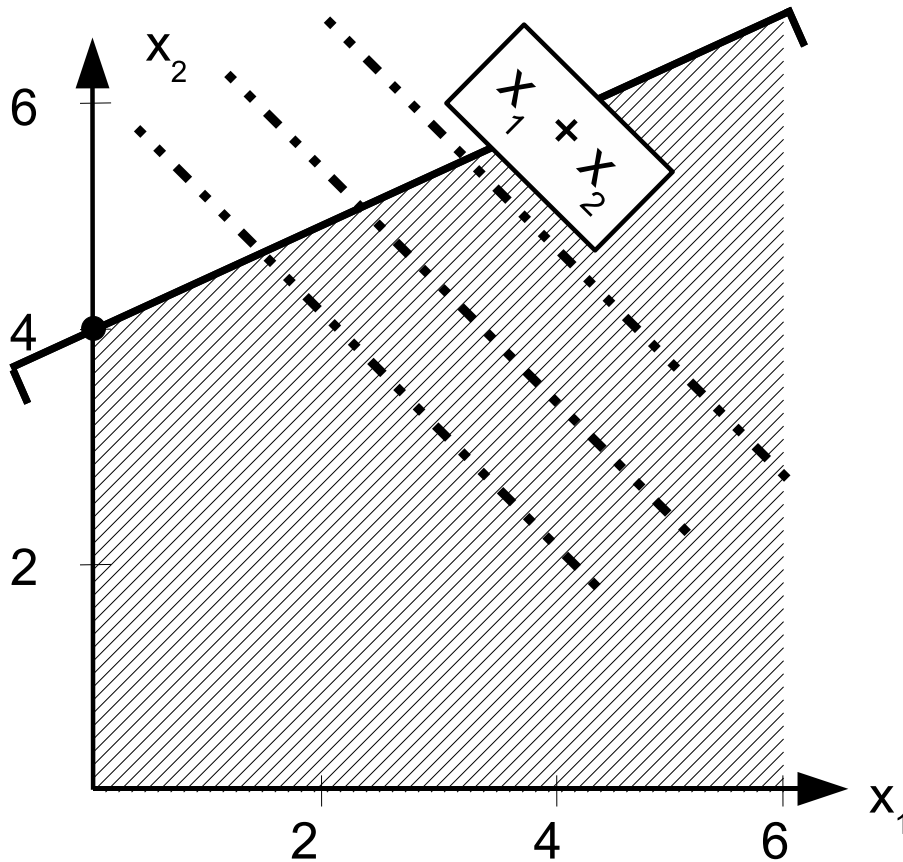
Optimális megoldás



$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Alternatív optimális
megoldások **nemkorlátos**
megengedett tartományon

Optimális megoldás



$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nemkorlátos optimális megoldás: a célfüggvény értéke a tetszőlegesen növelhető a megengedett tartományon belül