Bevezetés a lináris programozásba

- Példák: termelés optimalizálása, szállítás optimalizálása, folyamproblémák, portfóliótervezés
- Lineáris programok általános formája, elnevezések, mátrix alak
- Lineáris programmal modellezhető problémák általános jellemzői
- Egyéb: változók nemnegativitása, minimalizálás és maximalizálás, standard és kanonikus alakok, áttérés a kettő közt
- Jelölések, lineáris algebrai alapfogalmak: vektorok, mátrixok, mátrixok szorzása, Euklideszi terek, lineáris függetlenség, lineáris egyenletrendszerek, bázismegoldások

Termelésoptimalizálás

- **Feladat:** egy papírgyár kétfajta papírt gyárt: standard és deluxe kivitelt
  - mindkét típus 1 m^2-éhez egyaránt $\frac{1}{2}$ m^3 fa kell
  - a standard papír 1 m^2-ének elkészítéséhez 1, a deluxe kivitel elkészítéshez 2 munkaóra szükséges
  - minden héten 40 m^3 fa és 100 munkaóra áll rendelkezésre
  - a standard kivitelű papír 1 m^2-én 3 ezer, a deluxe kivitelűn 4 ezer forint haszon van
- **Kérdés:** mennyi standard és mennyi deluxe papírt gyártson a papírgyár a profit maximalizálásához?

Modellezés 1: változók kiválasztása

- **Termelésoptimalizálási probléma:** az erőforrások optimális allokációja a profit maximalizálása céljából
- Válasszunk két változót:
  - x_1: a standard papírból gyártott mennyiség [m^2]
  - x_2: a deluxe papírból gyártott mennyiség [m^2]
- Például $x_1 = 12$, $x_2 = 20$ jelentése: 12 m^2 standard és 20 m^2 deluxe papírt termel a gyár, ehhez
  - $\frac{1}{2} * 12 + \frac{1}{2} * 20 = 16$ m^3 fa és
  - $1 * 12 + 2 * 20 = 52$ munkaóra kell, amin
  - $3 * 12 + 4 * 20 = 116$ ezer forint profit képződik

Modellezés 2: kényszerfeltételek

- **Alapanyagkorlát:** a rendelkezésre álló fa (40 m^3) csak korlátos mennyiségű papír előállítására elég:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 40$$

- **Munkaerőkorlát:** az elérhető munkaórák (100 óra) csak korlátos mennyiségű papír előállítására elég:

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$

- **Nemnegativitás:**

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Modellezés 3: a célfüggvény

- A profit: $3x_1 + 4x_2$
- **Cél:** a profit maximalizálása:

$$\max 3x_1 + 4x_2$$

úgy, hogy közben a felhasznált fa és munkaerő nem haladja meg a rendenkezésre álló mennyiséget

Lineáris program

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & \leq & 40 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 100 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Lineáris program: elnevezések

- A változók lineáris **célfüggvényének** maximalizálása (vagy **költségfüggvényének** minimalizálása)
- A megoldás megfelel adott **kényszerfeltételeknek**, melyek a változók lineáris függvényei
- A kényszerfeltételeknek megfelelő x_1, x_2 változóértékeket **megengedett megoldásoknak** (vagy **lehetséges megoldásoknak**) nevezzük
- A megengedett változók halmaza a **megengedett tartomány** (vagy **lehetséges tartomány**)
- A célfüggvényt maximalizáló/minimalizáló megengedett megoldásokat **optimális megoldásnak** hívjuk
- A változókra **előjelmegkötés** tehető

Modellfeltévések

- Egy feladat akkor modellezhető és oldható meg lineáris programmal, ha az alábbi feltételek fennállnak
  - **Arányosság:** a célfüggvény/kényszerfeltételek értékéhez minden változó értékével egyenesen arányosan, a többi változótól függetlenül járul hozzá
  - **Additivitás:** a célfüggvényben/kényszerfeltételekben a változók lineáris szorzatainak az összege szerepel
  - **Folytonosság:** a változók tetszőlegesen kis értékei megengedettek
  - **Determinisztikusság:** a probléma paraméterei ismertek és időben állandóak

Lineáris programok általános alakja

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \ldots & + & c_nx_n & & \\
\text{s.t.} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
 & & & & & & & & & \\
 & x_1, & & x_2, & & \ldots, & & x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

Lineáris programok általános alakja

- m: a sorok száma $=$ a kényszerfeltételek száma
- n: az oszlopok száma $=$ a változók száma
- c_j: a j-edik változó költsége
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$: költségfüggvény/célfüggvény
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$: az i-edik kényszerfeltétel
  - a_{ij}: a kényszerfeltételek együtthatói
  - b_i: a i-edik „right-hand-side” (RHS)

Lineáris programok mátrixalakja

- A kényszerfeltételek mátrixa ($m \times n$):

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- A költségvektor ($1 \times n$, sorvektor): $\boldsymbol{c}^T = [c_1 \; c_2 \; \ldots c_n]$
- A RHS vektor ($m \times 1$, oszlopvektor): $\boldsymbol{b} = [b_1 \; b_2 \; \ldots \; b_m]^T$
- A változók vektora ($n \times 1$, oszlopvektor):

$$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T$$

Lineáris programok mátrixalakja

$$
\begin{array}{lccc}
\max & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & & \\
\text{s.t.} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & \leq & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\
& \boldsymbol{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rc}
\max & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

Termelésoptimalizálás

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \leq 40 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrcl} \max & \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & & \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} & \leq & \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} & \geq & 0 \end{array}$$

Villamosenergia-szállítás optimalizálása

- **Feladat:** egy erőművállalat 3 erőműből 4 várost lát el. A városok igénye adott, azonban az erőművek kapacitása korlátos. A villamosenergia szállítása az erőmű és a város távolságának függvényében nő, a veszteségek miatt
- **Kérdés:** melyik várost melyik erőműből szolgáljuk ki, hogy a veszteség minimális legyen?

Villamosenergia-szállítás optimalizálása

- **Szállítási probléma:** az igények hozzárendelése a kapacitásokhoz a költségek minimalizálása mellett

Erőmű		Város			
	Kapacitás	Város1	Város2	Város3	Város4
Erőmű1	35	8	6	10	9
Erőmű2	50	9	12	13	7
Erőmű3	40	14	9	16	5
Igény		45	20	30	30

(Kapacitás: [GWh], Igény: [GWh], Költség: [millió Ft/GWh])

Modellezés 1: változók kiválasztása

- x_{ij}: az i-edik erőműből a j-edik városba szállítandó villamosenergia mennyisége [GWh]
- Például x_{14} jelentése: az *Erőmű1*-ben megtermelt energiából a *Város4*-be szállított villamosenergia mennyisége

Modellezés 2: kényszerfeltételek

- **Ellátási feltétel:** az i-edik erőműből szállított energia mennyisége nem haladja meg annak kapacitását:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq \text{kapacitás}_i$$

- **Igényfeltétel:** az j-edik városba pontosan az ott igényelt mennyiségű energiát kell szállítani:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = \text{igény}_j$$

- **Nemnegativitás:** negatív értékű villamosenergia nem szállítható:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in \{1,2,3\},\ \forall j \in \{1,2,3,4\}$$

Modellezés 3: a célfüggvény

- Az i-edik erőműből a j-edik városba pontosan x_{ij} mennyiségű energiát szállítunk, ennek költsége:

$$\text{költség}_{ij} x_{ij}$$

- **Cél:** az összköltség minimalizálása:

$$\min \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} \text{költség}_{ij} x_{ij}$$

úgy, hogy x_{ij} eleget tesz az ellátási, az igény- és a nemnegativitási feltételnek

Lineáris program

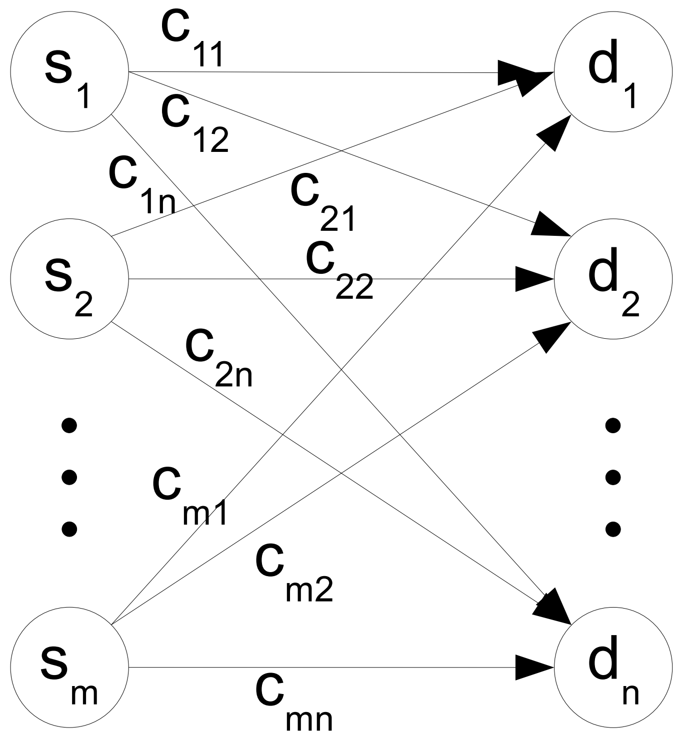
$$\min \quad 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 35 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 50 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 40 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 45 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 20 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 30 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 30
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

A szállítási probléma általánosan

- Adott m termelési pont, az i-edik kapacitása s_i (supply)
- Adott n fogyasztó, a j-edik igénye d_j (demand)
- Egységnyi termék szállításának költsége az i-edik termelési ponttól a j-edik fogyasztóig c_{ij}



A szállítási probléma általánosan

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & & \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i & & \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & & \forall j \in \{1, \ldots, n\} \\
x_{ij} \geq 0 & & \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \\
& & \forall j \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

Az optimalizálás iránya

- Ha a célfüggvény
  - profitot fogalmaz meg: **maximalizálás**
  - költséget jelent: **minimalizálás**
- Konverzió:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \\ -1 * \min\{-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

A kényszerfeltételek formái

- **Egyenlőtlenségek és egyenlőségek:** a szállítási problémában kétfajta kényszer szerepel
  - Ellátási feltétel: $\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leq \text{kapacitás}_i$
  - Igényfeltétel: $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = \text{igény}_j$
- Konverzió: egyenlőtlenség $\rightarrow$ egyenlőség
  - „$\leq$" tipusú kényszerfeltétel: egy újonnan bevezetett mesterséges („slack") változó **hozzáadásával**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{s_i} = b_i, \quad x_{s_i} \geq 0$$

A kényszerfeltételek formái

- Konverzió: egyenlőtlenség $\rightarrow$ egyenlőség
  - „$\geq$” tipusú kényszerfeltétel: mesterséges („slack”) változó **kivonásával**

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{s_i} = b_i, \quad x_{s_i} \geq 0$$

- Konverzió: egyenlőség $\rightarrow$ egyenlőtlenség
  - egy „$=$” típusú feltétel helyettesíthető egy „$\leq$” és egy „$\geq$” típusú feltétellel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

A változók előjele

- A gyakorlatban szinte mindig nemnegatív
- Nempozitív változó helyettesítése: $x_j = -x'_j$

$$\begin{array}{ccc} x_j \leq 0 & & x'_j \geq 0 \\ a_{ij}x_j & \Longrightarrow & -a_{ij}x'_j \\ c_jx_j & & -c_jx'_j \end{array}$$

- Szabad változó helyettesítése: $x_j = x'_j - x''_j$

$$\begin{array}{ccc} x_j \underset{\geq}{\overset{\leq}{=}} 0 & & x'_j \geq 0,\ x''_j \geq 0 \\ a_{ij}x_j & \Longrightarrow & a_{ij}(x'_j - x''_j) \\ c_jx_j & & c_j(x'_j - x''_j) \end{array}$$

Kanonikus és standard alak

	Minimalizálás	Maximalizálás
Standard alak	$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$
Kanonikus alak	$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$

Logisztikai probléma

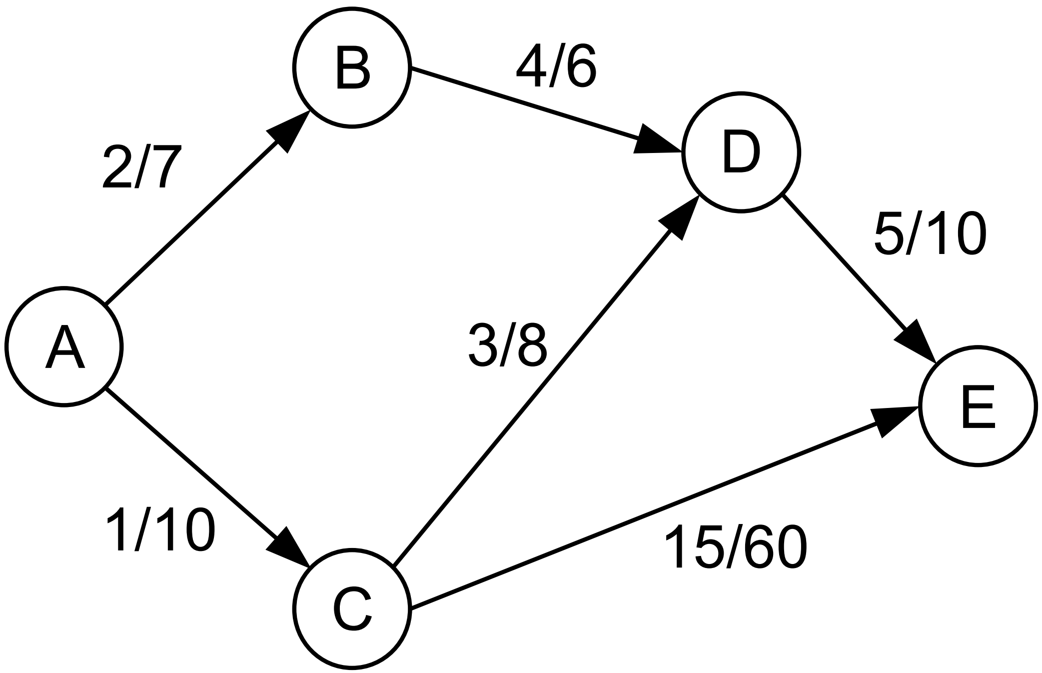
- **Feladat:** egy szállítmányozási vállalat a A, B, C, D és E pontok között fuvarozás céljából az alábbi hajójáratokat veheti igénybe, melyek mindegyike más költséggel szállítja az áru tonnáját (c, [millió Ft/t]) és más teherbírású (u, [t]).

c/u	A	B	C	D	E
A	-	2/7	1/10	-	-
B	-	-	-	4/6	-
C	-	-	-	3/8	15/60
D	-	-	-	-	5/10
E	-	-	-	-	-

- **Kérdés:** A és E pontok között 15 t áru szállítása minimális költséggel

Logisztikai probléma

- **Folyamprobléma:** a szállítási probléma általánosítása
  - csak bizonyos pontok között van összeköttetés
  - az összeköttetések kapacitása véges



Folyamprobléma

- x_{ij}: az i pontból a j pontba közlekedő hajón szállítandó áru mennyisége [t]
- x **folyamot** definiál a $G(V, E)$ gráfon:
  - **kapacitásfeltétel:** $\forall (i, j) \in E : x_{ij} \leq u_{ij}$
  - **folyammegmaradás:** az i pontba befolyó és az onnan kifolyó folyamok összege megegyezik az ott jelentező igény és termék különbségével:

$$\forall i \in V : \sum_{j:(j,i)\in E} x_{ji} - \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} = d_i$$

  - **nemnegativitás:** $\forall (i, j) \in E : x_{ij} \geq 0$
- Összköltség: $\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

Logisztikai probléma

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\min & 2x_{AB} & + & x_{AC} & + & 4x_{BD} & + & 3x_{CD} & + & 15x_{CE} & + & 5x_{DE} & & \\
\text{s.t.} & -x_{AB} & - & x_{AC} & & & & & & & & & = & -15 \\
& x_{AB} & & & - & x_{BD} & & & & & & & = & 0 \\
& & + & x_{AC} & & & - & x_{CD} & - & x_{CE} & & & = & 0 \\
& & & & & x_{BD} & & x_{CD} & & & - & x_{DE} & = & 0 \\
& & & & & & & & & x_{CE} & + & x_{DE} & = & 15 \\
& x_{AB} & & & & & & & & & & & \leq & 7 \\
& & & x_{AC} & & & & & & & & & \leq & 10 \\
& & & & & x_{BD} & & & & & & & \leq & 6 \\
& & & & & & & x_{CD} & & & & & \leq & 8 \\
& & & & & & & & & x_{CE} & & & \leq & 60 \\
& & & & & & & & & & & x_{DE} & \leq & 10 \\
& x_{AB}, & & x_{AC}, & & x_{BD}, & & x_{CD}, & & x_{CE}, & & x_{DE} & \geq & 0
\end{array}
$$

Logisztikai probléma

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}^T = [\ 2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 3 \ \ 15 \ \ 5], \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{CD} \\ x_{CE} \\ x_{DE} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 6 \\ 8 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}$$

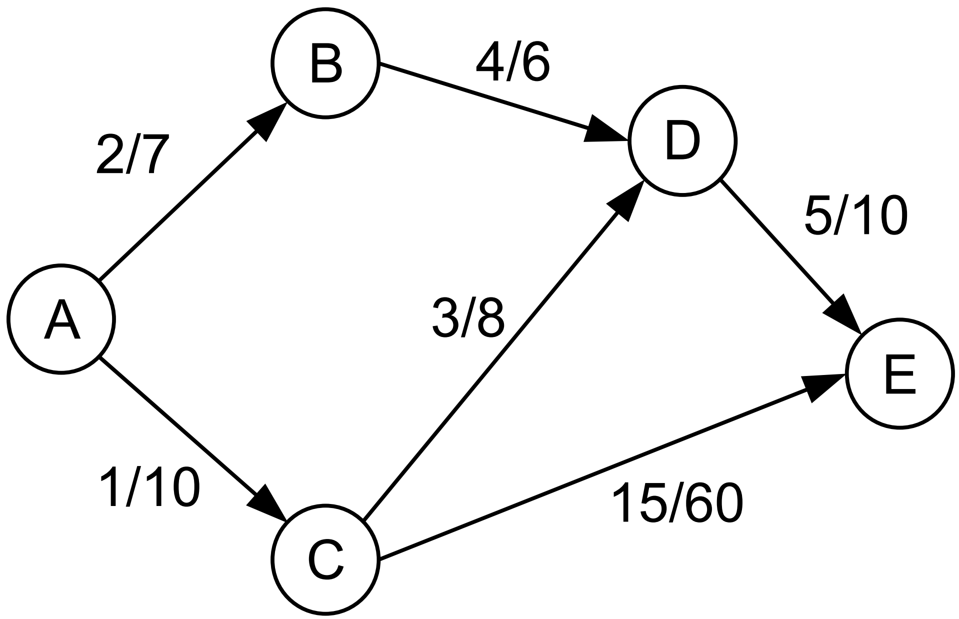
Minimális költségű folyamprobléma

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \\ & \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{u} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

- Az $\boldsymbol{N}$ mátrix speciális, jellemző a hálózatra
  - neve: illeszkedési mátrix
  - jelölése: $\boldsymbol{N}$

Logisztikai probléma

- **Feladat:** az előbbi hajózási útvonalakon most nem egy, de két szállítmányozási vállalat fuvarozik: az első vállalat A és E között 15 t árut, a második C és E között 20 t árut szállít
- **Kérdés:** a minimális költségű áru-hajó hozzárendelés, a hajók teherbírásának figyelembevételével



Logisztikai probléma

- x_{ij}^k: a k vállalat által az i pontból a j pontba közlekedő hajón szállítandó áru mennyisége [t]
- Az áruk nem keverednek, ezért adott k-ra $x_{ij}^k : (i,j) \in E$ folyamot alkot, melyre önállóan teljesül
    - a folyammegmaradás: $\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{d}^k$
    - a nemnegativitás: $\boldsymbol{x}^k \geq \boldsymbol{0}$
- Adott hajón szállított áru együttesen nem haladhatja meg annak teherbírását: $\boldsymbol{x}^1 + \boldsymbol{x}^2 \leq \boldsymbol{u}$

Logisztikai probléma

- Az első vállalat:

$$\boldsymbol{d}^1 = \begin{bmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^1 = \begin{bmatrix} x^1_{AB} \\ x^1_{AC} \\ x^1_{BD} \\ x^1_{CD} \\ x^1_{CE} \\ x^1_{DE} \end{bmatrix}$$

- Az második vállalat:

$$\boldsymbol{d}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^2 = \begin{bmatrix} x^2_{AB} \\ x^2_{AC} \\ x^2_{BD} \\ x^2_{CD} \\ x^2_{CE} \\ x^2_{DE} \end{bmatrix}$$

Többtermékes folyamprobléma

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k \in K} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^k \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{d}^k \quad \forall k \in K \\ & \sum_{k \in K} \boldsymbol{x}^k \leq \boldsymbol{u} \\ & \boldsymbol{x}^k \geq \boldsymbol{0} \qquad \forall k \in K \end{aligned}$$

- K: a „termékek” halmaza

Portfóliótervezés

- **Feladat:** egy 4 évig tartó építkezés finanszírozásához egy cégnek az első évben 2 millió, a második évben 4 millió, a harmadikban 8 és a negyedik, utolsó évben 5 millió forintra van szüksége, melyet hosszú lejáratú kötvények eladásából kíván előteremteni. A kötvényeket folyamatosan kell fizetni az épíkezés befejezése utáni évtől kezdve 20 évig, a várható kamatkilátások az első évre 7%, a másodikra 6%, majd 6.5% és 7.5%. Az építkezésre el nem költött pénzt a cég rövidlejáratú értékpapírokba fekteti, melyekre a kamatnyereség az első évben 6%, a másodikban 5.5%, a harmadikban pedig 4.5% (a negyedik évben már nem érdemes befektetni).
- **Kérdés:** mi az optimális portfólió?

Portfóliótervezés

- A kötvénykibocsátás és befektetés optimális stratégiájának meghatározása
  - a kötvényekibocsátásból befolyó pénzre kamatot kell fizetni
  - a befolyó pénz egy részét mindenképpen az építkezésre kell költeni
  - a másik része befektethető, amely bevételt eredményez, ellensúlyozva a kibocsátás kamatterheit
  - mennyi kötvényt érdemes kiadni és a befolyó pénz mekkora részét érdemes befektetni az első, második, stb. évben, figyelembe véve a kamatkilátásokat?

Portfóliótervezés

- $x_j : j = 1, \ldots, 4$: a j-edik év elején kibocsátott kötvények pénzértéke [millió Ft]
- $y_j : j = 1, \ldots, 3$: a j-edik év elején értékpapírba fektetett pénz értéke [millió Ft]
- Az első évben befolyt pénz (x_1) egy részét (2 millió Ft) az építkezésre kell költeni, a maradék befektethető (y_1)

$$x_1 = 2 + y_1$$

- A második évben
  - bevétel: kötvénykibocsátásból (x_2) és az előző évben befektetett pénz kamataiból ($1.06y_1$)
  - kiadás: építkezés finanszírozása (4 millió Ft) és újabb rövidtávú befektetés (y_2)

$$x_2 + 1.06y_1 = 4 + y_2$$

Portfóliótervezés

- A harmadik évben
  - bevétel: kötvénykibocsátásból (x_3) és az előző évben befektetett pénz kamataiból ($1.055y_2$)
  - kiadás: építkezés finanszírozása (8 millió Ft) és újabb rövidtávú befektetés (y_3)

$$x_3 + 1.055y_2 = 8 + y_3$$

- A negyedik évben
  - bevétel: kötvénykibocsátásból (x_4) és az előző évben befektetett pénz kamataiból ($1.045y_3$)
  - kiadás: építkezés finanszírozása (5 millió Ft), újabb rövidtávú befektetés már nincs

$$x_4 + 1.045y_3 = 5$$

Portfóliótervezés

- **Cél:** a kibocsátott kötvényekre fizetendő kamat minimalizálása
- A kötvényeket 20 év alatt kell visszafizetni, a kibocsátás évében aktuális kamatszint szerint
  - az első évi kötvény kamata: $(20 * 0.07)x_1$
  - a második évi kötvény kamata: $(20 * 0.06)x_2$
  - a harmadik évi kötvény kamata: $(20 * 0.065)x_3$
  - a negyedik évi kötvény kamata: $(20 * 0.075)x_4$

Portfóliótervezés

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (20 * 0.07)x_1 + (20 * 0.06)x_2 + \\
& (20 * 0.065)x_3 + (20 * 0.075)x_4 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - y_1 = 2 \\
& 1.06y_1 + x_2 - y_2 = 4 \\
& 1.055y_2 + x_3 - y_3 = 8 \\
& 1.045y_3 + x_4 = 5 \\
& x_j \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 4\} \\
& y_j \geq 0 \qquad \forall i \in \{1, \ldots, 3\}
\end{aligned}
$$

A lineáris programozás alkalmazásai

- Menedzsmenttudományok
  - termelésoptimalizálás
  - portfóliótervezés
- Logisztika
  - szállítási problémák
  - munkafázis-ütemezés
- Távközlés
  - hálózatoptimalizálás
  - útvonaltervezés

Jelölések: vektorok

- **Oszlop n-vektor:** $\boldsymbol{x} = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, elemei x_i-k
- **Sor m-vektor:** $\boldsymbol{x}^T = [x_j] = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_m \end{bmatrix}$, elemei x_j-k
- **Zéró vektor:** $\mathbf{0}$
- **1-vektor** (minden eleme 1): $\mathbf{1}$
- Az i**-edik kanonikus egységvektor:** $\boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{e_i}^T$

$$\boldsymbol{e_i}^T = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{1 \text{ az } i\text{-edik pozícióban}}$$

Műveletek vektorokkal

- **Vektorok összege:** paralelogramma szabály

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

- **Vektor szorzása skalárral:** $\lambda\boldsymbol{x} = [\lambda x_i]$
- Egy sor n-vektor és egy oszlop n-vektor **skalárszorzata**

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Lineáris függetlenség

- Egy $\boldsymbol{b}$ vektor az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ vektorok **lineáris kombinációja**, ha $\boldsymbol{b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{a}_i$ valamely $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valós számokra
- Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Rightarrow \forall i = \{1, 2, \ldots, k\} : \lambda_i = 0$$

- Az $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ n-vektorok **kifeszítik** az $V \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorteret, ha minden V-beli $\boldsymbol{b}$ vektor felírható az $\boldsymbol{a}_i$ vektorok lineáris kombinációjaként
- Az V vektorteret kifeszítő n-vektorok minimális $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{a}_k$ halmaza V egy **bázisa**, k pedig V **dimenziója**

Jelölések: mátrixok

- Egy $m \times n$ méretű $\boldsymbol{A}$ **mátrix**

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a^1} \\ \boldsymbol{a^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a^m} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$$

- A **zéró mátrix** minden eleme 0
- A $n \times n$ méretű **egységmátrix**

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal

- **Mátrixok összege:** ha $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{B}$ $m \times n$-es, akkor

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$$

- $\boldsymbol{A}$ ($m \times p$) és $\boldsymbol{B}$ ($p \times n$) **mátrixok szorzata** $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ ($m \times n$)

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \boldsymbol{a^i} \boldsymbol{b_j}$$

- Ha $\boldsymbol{A}$ $n \times n$-es kvadratikus mátrix és $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$, akkor $\boldsymbol{A}^{-1}$ az $\boldsymbol{A}$ mátrix **inverze**
- Az inverz létezik, ha $\boldsymbol{A}$ sorvektorai (oszlopvektorai) lineárisan függetlenek ($\boldsymbol{A}$ **nemszinguláris**)
- Az $\boldsymbol{A}$ mátrix lineárisan független oszlopvektorainak (sorvektorainak) száma $\boldsymbol{A}$ mátrix **rangja**

Determináns

- Egy $n \times n$ valós értékű $\boldsymbol{A}$ mátrixhoz tartozó **determináns**

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

  ahol a_{ij} $\boldsymbol{A}$ mátrix (i, j)-edik eleme, A_{ij} pedig a_{ij} kofaktora, amelyet úgy kapunk, hogy kitöröljük az i-edik sort és a j-edik oszlopot és vesszük a maradék determinánsát beszorozva $(-1)^{i+j}$-nel
- $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^T$
- ha $\boldsymbol{B}$-t úgy kapjuk, hogy $\boldsymbol{A}$ két sorát vagy oszlopát felcseréljük, akkor $\det \boldsymbol{B} = -\det \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}$ nemszinguláris akkor és csak akkor, ha $\det \boldsymbol{A} \neq 0$

Lineáris egyenletrendszerek

- Legyen $\boldsymbol{A}$ egy $m \times n$ méretű mátrix és $\boldsymbol{b}$ egy oszlop m-vektor. Keressük azt az $\boldsymbol{x}$ oszlop n-vektort, amire $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ teljesül
- Ha $\boldsymbol{b}$ az $\boldsymbol{A}$ oszlopaitól lineárisan független, akkor nem írható fel azok lineáris kombinációjaként, így nincs megoldás
- Legyen $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rang}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = k$
- Rendezzük át $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{b}$ sorait úgy, hogy az első k sor legyen lineárisan független

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}$$

ahol $\boldsymbol{A}_1$ $k \times n$ méretű és $\boldsymbol{A}_2$ $(m-k) \times n$ méretű mátrix, és $\operatorname{rang}(\boldsymbol{A}_1) = k$, és $\boldsymbol{b}_1$ oszlop k-vektor, $\boldsymbol{b}_2$ pedig oszlop $(m-k)$-vektor

Lineáris egyenletrendszerek

- Ha $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$, akkor $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ is automatikusan teljesül, mert $[\boldsymbol{A}_2\ \boldsymbol{b}_2]$ mátrix sorai felírhatóak $[\boldsymbol{A}_1\ \boldsymbol{b}_1]$ sorainak lineáris kombinációjaként. Hagyjuk el az $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_2$ sorokat
- Mivel $\mathrm{rang}(\boldsymbol{A}_1) = k$, ezért $\boldsymbol{A}_1$ oszlopaiból kiválasztható k lineárisan független oszlop
- Rendezzük ezeket az első k oszlopba: $\boldsymbol{A}_1 = [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}]$, ahol
  - $\boldsymbol{B}$ egy $k \times k$ méretű, kvadratikus, nemszinguláris mátrix (neve **bázis mátrix**)
  - $\boldsymbol{N}$ egy $k \times (n-k)$ méretű mátrix (**nembázis mátrix**)
- Hasonlóan, rendezzük át $\boldsymbol{x}$ elemeit is: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix}$, ahol $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}$ a $\boldsymbol{B}$ oszlopaihoz tartozó, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}$ pedig az $\boldsymbol{N}$ oszlopaihoz tartozó változók vektora

Lineáris egyenletrendszerek

- Az átrendezett egyenletrendszer

$$[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}_1, \quad \text{vagyis} \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{b}_1$$

- Balról szorozva $\boldsymbol{B}$ inverzével és átrendezve

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}$$

- Ha $k = n$, akkor egyedi megoldást kapunk: $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}_1$ (**bázismegoldás)**
- Ha $k < n$, akkor $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}$ tetszőlegesen megválasztható, ekkor végtelen számú megoldás létezik

Lineáris egyenletrendszerek: példa

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 10 \\ - & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ & & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \end{array}$$

- Mátrixalakban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Bázismegoldást keresünk: írjuk fel $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ mátrixot és válasszunk generálóelemet

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Lineáris egyenletrendszerek: példa

- Adjuk hozzá az első sort a másodikhoz majd válasszunk új generálóelemet

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

- Hasonlóan

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right]$$

Lineáris egyenletrendszerek: példa

- Az eredeti egyenletrendszer: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
- Az első 3 oszlopot választva bázisnak: $[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$
- Beszorozva balról $\boldsymbol{B}^{-1}$-gyel

$$\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} \\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- Visszahelyettesítve a $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}}$ alakba

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} x_4$$

- x_4 tetszőlegesen választható